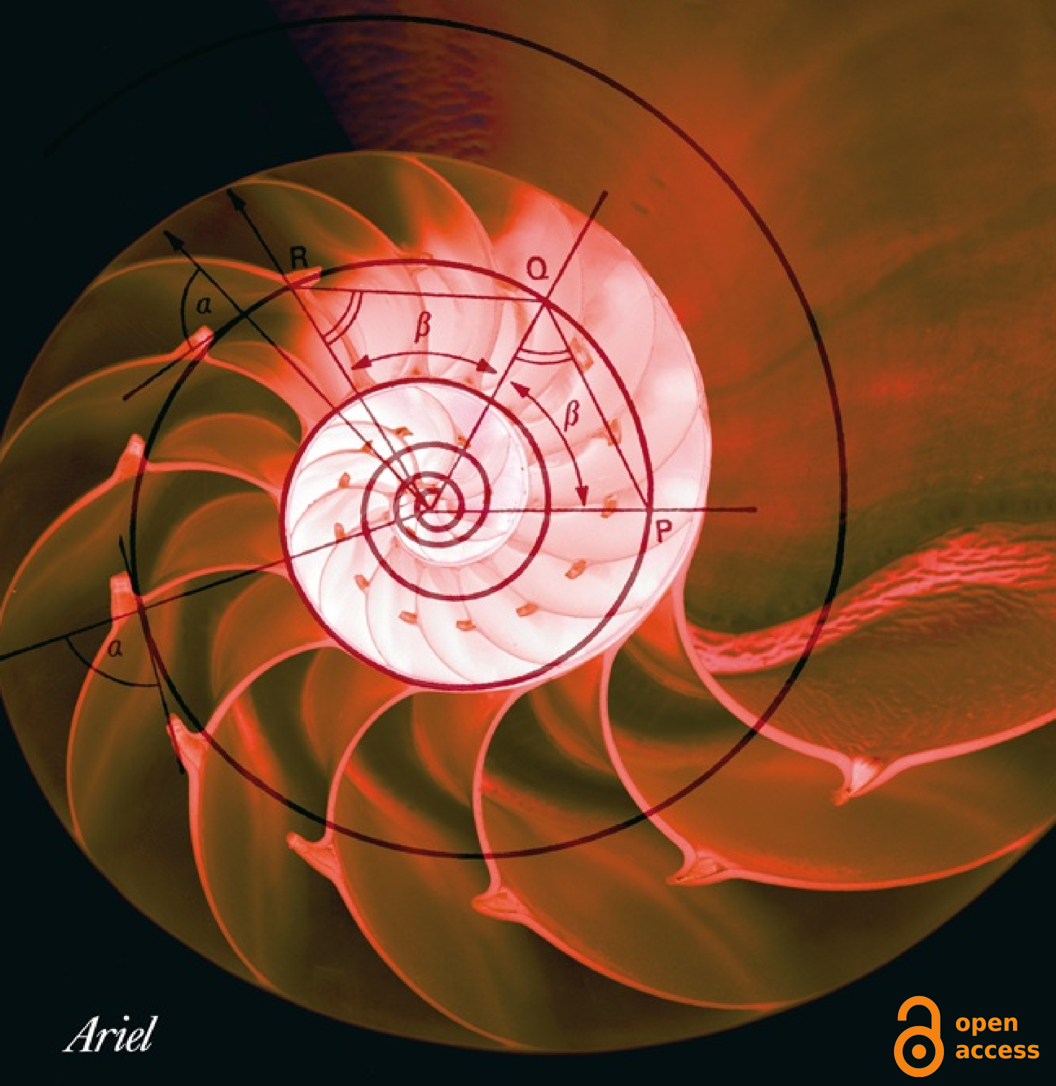
LA PROPORCIÓN ÁUREA

LA HISTORIA DE *PHI*, EL NÚMERO MÁS SORPRENDENTE DEL MUNDO

MARIO LIVIO



Ariel

Índice

La proporción áurea
Mario Livio

Título original: *The Golden Ratio*

Av. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona
www.planetadelibros.com
Primera edición en libro electrónico (epub): junio de 2016
ISBN: 978-84-344-2437-1 (epub)
Conversión a libro electrónico: Newcomlab, S. L. L.
www.newcomlab.com

1
PRELUDIO DE UN NÚMERO

Innumerables son las maravillas del mundo.
SÓFOCLES (495-405 a.C.)

El famoso físico británico Lord Kelvin (William Thomson; 1824-1907), cuyo nombre se utilizó para denominar la escala de temperaturas absolutas, dijo lo siguiente en una de sus conferencias: «Cuando no puedes expresarlo con un número, tu conocimiento se vuelve pobre e insatisfactorio.» Kelvin se refería, por supuesto, al conocimiento necesario para el progreso de la ciencia. Pero los números y las matemáticas tienen la curiosa propensión a contribuir incluso al conocimiento de cosas que son, o al menos parecen ser, extremadamente ajenas a la ciencia. En el cuento de Edgar Allan Poe *El misterio de Marie Rogêt*, el famoso detective Auguste Dupin comenta: «Transformamos la casualidad en una cuestión de cálculo absoluto. Supeditamos lo que no buscamos y lo que no imaginamos a las fórmulas matemáticas de las escuelas». Incluso a un nivel más simple, considere el siguiente problema a que puede haberse enfrentado al prepararse para acudir a una fiesta: si tiene una tableta de chocolate de doce obleas, ¿cuántas veces tendrá que partirla para separar todas las piezas? De hecho la respuesta es mucho más sencilla de lo que pueda imaginar y no requiere prácticamente ningún cálculo. Cada vez que separa una oblea, dispone de una pieza más que antes de hacerlo. Por tanto, si debe acabar el proceso con doce piezas, deberá repetir la operación once veces. (Pruébelo usted mismo.) En general, y sin tener en cuenta el número de obleas de la tableta de chocolate, el número de veces que tendremos que partirla será siempre uno menos que el número de obleas que necesitemos.

Incluso si usted no se encuentra entre los amantes del chocolate, podrá comprender que el anterior ejemplo demuestra una sencilla regla matemática que puede aplicarse en muchas otras circunstancias. Pero aparte de las propiedades, fórmulas y reglas matemáticas (muchas de las cuales acabamos olvidando), existe también una serie reducida de números especiales tan ubicuos que jamás dejarán de sorprendernos. El más famoso es el número *pi* (π), la proporción de la circunferencia de cualquier círculo con relación a su diámetro. El valor de pi, 3,14159…, ha fascinado a muchas generaciones de matemáticos. A pesar de que inicialmente fue definido en el campo de la geometría, pi aparece frecuente e inesperadamente en el cálculo de probabilidades. Uno de los ejemplos más famosos es el de la Aguja de Buffon, problema de probabilidades resuelto en 1777 por el matemático francés George-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788). Leclerc propuso: suponga que tiene una larga hoja de papel en el suelo con líneas rectas paralelas espaciadas entre sí a una distancia regular.

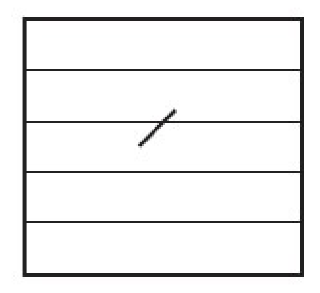


FIGURA 1

Lance al azar sobre el papel una aguja del mismo tamaño que el espacio existente entre las líneas. ¿Qué probabilidad hay de que la aguja caiga de tal modo que cruce una de las líneas (figura 1)? Sorprendentemente, la respuesta resulta ser el número $2/\pi$. Por tanto, en principio se puede

calcular π repitiendo este experimento muchas veces y observando en qué fracción del número total de lanzamientos se obtiene el cruce con la línea. (Existen formas menos tediosas de obtener el valor de pi.) En la actualidad, pi se ha transformado en una palabra tan familiar que incluso el director de cine Darren Aronofsky la utilizó para titular su *thriller* intelectual del año 1998.

Phi (Φ) es otro número menos conocido que pi, pero mucho más fascinante en muchos aspectos. Suponga que le planteo la siguiente pregunta: ¿qué tienen en común la deliciosa disposición de los pétalos de una rosa, la famosa pintura de Salvador Dalí *Sacramento de la Última Cena*, las magníficas conchas espirales de los moluscos y la cría de conejos? Aunque resulte difícil de creer, todos estos ejemplos dispares entre sí tienen en común un número determinado o una proporción geométrica conocida desde la Antigüedad, un número que en el siglo XIX recibió la distinción de «Número Áureo», «Proporción Áurea» y «Sección Áurea». Un libro publicado en Italia a principios del siglo XVI tuvo la osadía de denominarlo «Proporción Divina».

En la vida cotidiana, utilizamos la palabra «proporción» tanto para definir la relación comparativa que se establece entre las partes de las cosas en relación con el tamaño o la cantidad, o bien cuando queremos describir una relación armónica entre diferentes partes. En matemáticas, la palabra «proporción» se utiliza para describir una igualdad tipológica: nueve es a tres como seis es a dos. Como veremos más adelante, la Proporción Áurea ofrece una mezcolanza intrigante de ambas definiciones que, al ser definida matemáticamente, se le atribuyen cualidades armónicas placenteras.

La primera definición precisa de lo que más tarde se conoció como Proporción Áurea la realizó alrededor del año 300 a.C. el fundador de la geometría como sistema deductivo formal, Euclides de Alejandría. Retomaremos a Euclides y sus fantásticos logros en el capítulo 4, pero de momento déjenme señalar que es tanta la admiración que despierta Euclides que en 1923 la poetisa Edna St. Vincent Millay escribió un poema titulado *Sólo Euclides ha visto la auténtica belleza*. De hecho, incluso se ha conservado el cuaderno anotado de Millay del curso que realizó sobre geometría euclídea. Euclides definió una proporción derivada de la simple división de una línea en lo que denominó su «media y extrema razón». En palabras de Euclides:

> Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor.



FIGURA 2

En otras palabras, si observamos la figura 2, la línea *AB* es claramente más larga que el segmento *AC*; del mismo modo, el segmento *AC* es más largo que el *CB*. Si la proporción de la longitud de *AC* con relación a la de *CB* es la misma que la que existe entre *AB* y *AC*, entonces la línea ha sido cortada en media y extrema razón o en Proporción Áurea.

¿Quién hubiera adivinado que esta división de líneas aparentemente inocente, y que Euclides definió sólo para propósitos geométricos, tendría consecuencias en temas tan dispares como la disposición de las hojas en botánica, la estructura de galaxias que contienen billones de estrellas, o desde las matemáticas a las artes? Por tanto, la Proporción Áurea nos ofrece un ejemplo maravilloso de aquel

sentimiento de asombro absoluto que el famoso físico Albert Einstein (1879-1955) valoraba tanto. En palabras del propio Einstein: «La cosa más bella que podemos experimentar es lo misterioso. Es la emoción fundamental que hallamos en la cuna del auténtico arte y la ciencia. Aquel que ya lo conoce y ya no puede hacerse preguntas, quien ya no siente asombro, está muerto, no es más que una vela apagada.»

Como veremos en este libro, el valor preciso de la Proporción Áurea (la proporción de *AC* a *CB* en la figura 2) es el número infinito e irrepetible 1,6180339887…, y este tipo de números infinitos ha intrigado a la humanidad desde la Antigüedad. Cuenta una historia que cuando el matemático griego Hipasio de Metaponto descubrió en el siglo v a.C. que la Proporción Áurea era un número que no era ni entero (como los familiares 1, 2, 3…) ni una proporción de dos números enteros (como las fracciones 1/2, 2/3, 3/4…, conocidas colectivamente como *números racionales*) el resto de discípulos de Pitágoras (pitagóricos), el famoso matemático, quedaron consternados. La visión pitagórica del mundo (descrita en detalle en el capítulo 2) se basaba en la admiración extrema por el *arithmos* —las propiedades intrínsecas de los números enteros y sus proporciones— así como su supuesto papel en el cosmos. La conciencia de que existían números, como la Proporción Áurea, que continuaban infinitamente sin mostrar ninguna repetición o patrón provocó una crisis filosófica profunda. La leyenda incluso señala que, abrumados por un descubrimiento de tales características, los pitagóricos sacrificaron un centenar de bueyes con temor reverente, aunque esto parece altamente improbable ya que los pitagóricos eran vegetarianos estrictos. Me gustaría dejar claro que muchas de estas historias están basadas en material histórico poco documentado. Aunque no se conoce la fecha

exacta del descubrimiento de números que no eran ni enteros ni fracciones y que se conocen como *números irracionales*, algunos investigadores han propuesto el siglo v a.C., lo que al menos coincide con la cronología de las historias anteriormente descritas. Lo que es evidente es que los pitagóricos creían, en líneas generales, que la existencia de tales números era tan horrible que debía responder a algún tipo de error cósmico, un error que debía ser eliminado y mantenido en secreto.

El hecho de que la Proporción Áurea no pueda expresarse como una fracción (como un número racional) simplemente significa que la proporción de las dos longitudes *AC* y *CB* de la figura 2 no puede expresarse como una fracción. En otras palabras, por mucho que nos esforcemos, no podremos hallar ninguna medida común que esté contenida, digamos, 31 veces en *AC* y 19 en *CB*. Dos longitudes que no disponen de medidas comunes se conocen por el nombre de *inconmensurables*. Por tanto, el descubrimiento de que la Proporción Áurea es un número irracional representó, al mismo tiempo, el descubrimiento de la inconmensurabilidad. En *Vida Pitagórica* (circa 300 d.C.), Jámblico, filósofo e historiador descendiente de una familia noble de Siria, describe la violenta reacción tras el descubrimiento:

> Dicen que el primer (humano) en revelar la naturaleza de la mensurabilidad y la inconmensurabilidad a los que no eran dignos de compartir la teoría fue tan odiado que no sólo se le apartó de la asociación común y del modo de vida (pitagórico), sino que éstos incluso cavaron su tumba, como si (su) anterior colega ya hubiera abandonado esta vida.

En la literatura matemática especializada, el símbolo común para la Proporción Áurea es la letra griega tau (τ del griego τουή, *to-mĕ'*, que significa «el corte» o «la sección»). De todos modos, a principios del siglo xx, el matemático estadounidense Mark Barr le dio a la proporción el nombre

de phi (Φ), la primera letra griega del nombre de Fidias, el gran escultor griego que vivió alrededor del 490 al 430 a.C. Los logros más importantes de Fidias fueron el «Partenón de Atenea» en Atenas y el *Zeus* del templo de Olimpia. Tradicionalmente, también se le han atribuido otras esculturas del Partenón, aunque es bastante probable que muchas de ellas fueran obra de sus estudiantes y ayudantes. Barr decidió honrar al escultor porque una serie de historiadores del arte sostenían que Fidias había utilizado con frecuencia y de forma meticulosa la Proporción Áurea en sus esculturas. (Más adelante examinaremos meticulosamente otras afirmaciones similares.) A lo largo del libro utilizaré indistintamente las expresiones Proporción Áurea, Sección Áurea, Número Áureo, phi e incluso el símbolo Φ ya que son los nombres con que uno se topa con más frecuencia en la literatura matemática para el gran público.

Algunas de las mayores mentes matemáticas de todos los tiempos, desde Pitágoras y Euclides en la Grecia antigua, pasando por el matemático medieval italiano Leonardo de Pisa y el astrónomo renacentista Johannes Kepler, hasta las figuras científicas contemporáneas como el físico oxoniense Roger Penrose, han dedicado horas interminables a esta sencilla proporción y a sus propiedades. Pero la fascinación por la Proporción Áurea no se circunscribe únicamente al mundo de las matemáticas. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitectos, psicólogos e incluso místicos han meditado y debatido sobre las características de su ubicuidad y encanto. De hecho, no es descabellado inferir que la Proporción Áurea ha inspirado a pensadores de todas las disciplinas de un modo que no tiene comparación con ningún otro número en la historia de las matemáticas.

Se ha dedicado un inmenso trabajo investigador, sobre todo por parte del matemático y escritor canadiense Roger Herz-Fischler (expuesto en su magnífica obra *A Mathematical History of the Golden Number*), sólo para averiguar el origen del nombre «Sección Áurea». Teniendo en cuenta el entusiasmo generado por dicha proporción desde la Antigüedad, podemos llegar a pensar que los orígenes del nombre son exclusivamente antiguos. Ciertamente, algunas obras con autoridad de la historia de las matemáticas, como *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* de François Lasserre e *Historia de la matemática* de Carl B. Boyer, sitúan el origen de este nombre en los siglos XV y XVI, respectivamente. Sin embargo, parece que las cosas no son así. Tras un gran esfuerzo repasando todos los datos históricos disponibles, el matemático alemán Martin Ohm (hermano del famoso físico Georg Simon Ohm, el apellido que se escogió para denominar a la ley Ohm en electricidad) utilizó el término por primera vez en la segunda edición de 1835 de su obra *Die Reine Elementar-Mathematik* (Matemáticas elementales puras). Ohm escribe en una nota a pie de página: «Habitualmente también se denomina sección áurea a esta división de una línea arbitraria en dos partes.» El lenguaje de Ohm revela a las claras que no fue él quien inventó el término, sino que más bien usaba un nombre comúnmente aceptado. A pesar de todo, el hecho de que no lo usara en la primera edición de su obra (publicada en 1826) sugiere, como mínimo, que el nombre de «Sección Áurea» (o, en alemán, «Goldene Schnitt») se hizo popular a partir de 1830. Puede ser que el nombre se utilizara de forma oral con anterioridad a dicha fecha, posiblemente en círculos no matemáticos. Sin embargo, no hay lugar a dudas de que con posterioridad al libro de Ohm, el término «Sección Áurea» comenzó a aparecer con

frecuencia y asiduidad en Alemania en la literatura matemática y de historia del arte. En inglés, puede ser que el debut se produjera en un artículo de James Sully sobre estética que apareció en la novena edición de la *Enciclopedia Británica* en 1875. Sully se refiere a la «interesante investigación experimental… iniciada por (Gustav Theodor) Fechner (físico y psicólogo pionero alemán del siglo XIX) sobre la pretendida superioridad de la "sección áurea" como proporción visible». (Profundizaré en los experimentos de Fechner en el capítulo 7.) Parece ser que, en inglés, el uso más antiguo en un contexto matemático debemos situarlo en un artículo titulado «La Sección Áurea» (obra de E. Ackermann) y que apareció en 1895 en el *American Mathematical Monthly*, así como en el libro de 1898 *Introduction to Algebra* del conocido profesor y escritor G. Chrystal (1851-1911). A modo de curiosidad, debo señalar que la única definición de un «Número Áureo» que aparece en la edición de 1900 de la enciclopedia francesa *Nouveau Larousse Illustré* es la siguiente: «Un número utilizado para indicar cada uno de los años del ciclo lunar.» Se refiere a la posición de un calendario anual que forma parte de un ciclo de diecinueve años tras el cual las fases de la luna se repiten en las mismas fechas. Es evidente que a la frase le costó algo más de tiempo para entrar en la nomenclatura matemática francesa.

Pero ¿por qué tanto alboroto? ¿Qué provoca que este número, o proporción geométrica, sea tan excitante como para merecer toda esta dedicación?

Lo que convierte en tan atractiva a la Proporción Áurea es, ante todo, su capacidad para aparecer del modo más inexplicable allí donde menos se la espera.

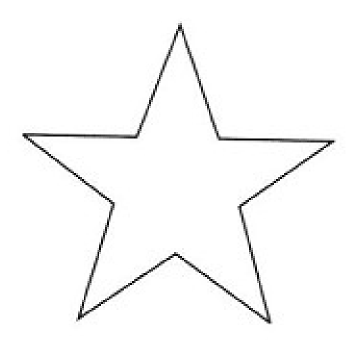


FIGURA 3

Cojan, por ejemplo, una simple manzana, el fruto que se asocia por lo general (quizá de modo equivocado) con el árbol del conocimiento que aparece tan prominentemente en el relato bíblico de la caída en desgracia de la humanidad, y córtenla por su circunferencia. Descubrirán que las semillas están ordenadas formando una estrella de cinco puntas o pentagrama (figura 3). Cada uno de los cinco triángulos isósceles que configuran las esquinas de un pentagrama tienen la siguiente propiedad: la proporción de la longitud de su lado más largo con relación al más corto (la base implícita) es igual a la Proporción Áurea, 1, 618… Pero quizá piense que esto no es tan sorprendente. Pese a todo, dado que la Proporción Áurea ha sido definida como una proporción geométrica, quizá no debería sorprendernos descubrir que esta proporción se encuentra en algunas formas geométricas.

Sin embargo, esto tan sólo es la punta del iceberg. Según la tradición budista, en uno de los sermones de Buda, éste no pronunció palabra alguna; simplemente sostuvo una flor frente a su audiencia. ¿Qué puede enseñarnos una flor? Una rosa, por ejemplo, suele utilizarse como paradigma simbólico de la simetría natural, de la armonía, el amor y la fragilidad. En *La religión del hombre*, el poeta y filósofo indio Rabindranath Tagore (1861-1941) escribió: «De algún

modo sentimos que, a través de una rosa, el lenguaje del amor alcanza nuestros corazones.» Supongan que queremos medir la apariencia simétrica de una rosa. Cojan una rosa y disecciónenla para descubrir la forma en que sus pétalos se superponen entre sí. Tal y como describo en el capítulo 5, descubrirán que las posiciones de los pétalos siguen un orden basado en una regla matemática que se fundamenta en la Proporción Áurea.

Fijémonos ahora en el mundo animal. A todos nos resultan familiares las hermosas estructuras espirales características de muchas conchas de molusco como la del nautilo (*Nautilus pompilius*; figura 4).

De hecho, el Shiva danzante del mito hindú lleva en una mano un nautilo para simbolizar uno de los instrumentos que iniciaron la creación. Estas conchas también han servido de inspiración a muchas construcciones arquitectónicas. El arquitecto estadounidense Frank Lloyd Wright (1869-1959), por ejemplo, basó el diseño del Museo Guggenheim de Nueva York en la estructura del nautilo. En el interior del museo, los visitantes ascienden por una rampa en espiral, moviéndose mientras su capacidad imaginativa se ve saturada por el arte que observan, del mismo modo que un molusco construye su concha en espiral al tiempo que ocupa por completo el espacio físico de la misma. En el capítulo 5 descubriremos que el crecimiento de las conchas en espiral también responde a un modelo gobernado por la Proporción Áurea.

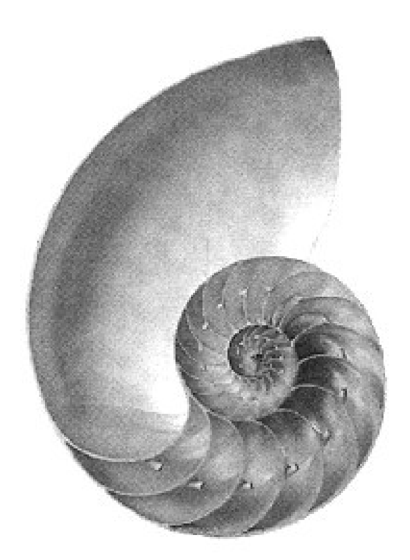


FIGURA 4

Por ahora no es necesario que seamos místicos de los números para empezar a sentir cierta admiración por la propiedad de la Proporción Áurea que aparece en situaciones y fenómenos en apariencia totalmente inconexos. Además, como indiqué al principio de este capítulo, la Proporción Áurea puede encontrarse no sólo en fenómenos naturales sino también en una gran variedad de objetos de factura humana y obras de arte. Por ejemplo, en la pintura de Salvador Dalí de 1955, *Sacramento de la Última Cena* (National Gallery, Washington D.C., figura 5), las dimensiones del cuadro (aproximadamente 105 1/2" × 65 3/4") están en Proporción Áurea entre sí. Más importante aún es la presencia de un dodecaedro (un sólido regular de doce caras en que cada una de ellas es un pentágono) que flota sobre la mesa encerrándola. Como veremos en el capítulo 4, los sólidos regulares (como el cubo) que pueden encerrarse con una esfera (con todos sus vértices descansando en la misma), y en especial el dodecaedro, están íntimamente relacionados con la Proporción Áurea. ¿Por qué motivo Dalí decidió mostrar la Proporción Áurea de un

modo tan prominente en su pintura? Su afirmación de que «la Comunión debe ser simétrica» tan sólo es el principio de la respuesta. Como muestro en el capítulo 7, la Proporción Áurea queda representada (o al menos eso es lo que se afirma) en las obras de muchos otros artistas, arquitectos, diseñadores e incluso en famosas composiciones musicales. En términos generales, la Proporción Áurea se ha usado en algunas de estas obras para conseguir lo que podríamos denominar «efectividad visual (o auditiva)». Una de las propiedades que contribuye a dicha efectividad es la *proporción* (la relación de tamaño entre las partes y con relación al conjunto). La historia del arte muestra que en la larga búsqueda de un evasivo canon de las proporciones «perfectas», un canon que de algún modo conferiría automáticamente placer estético a todas las obras de arte, la Proporción Áurea ha demostrado ser el más duradero. Pero ¿por qué?

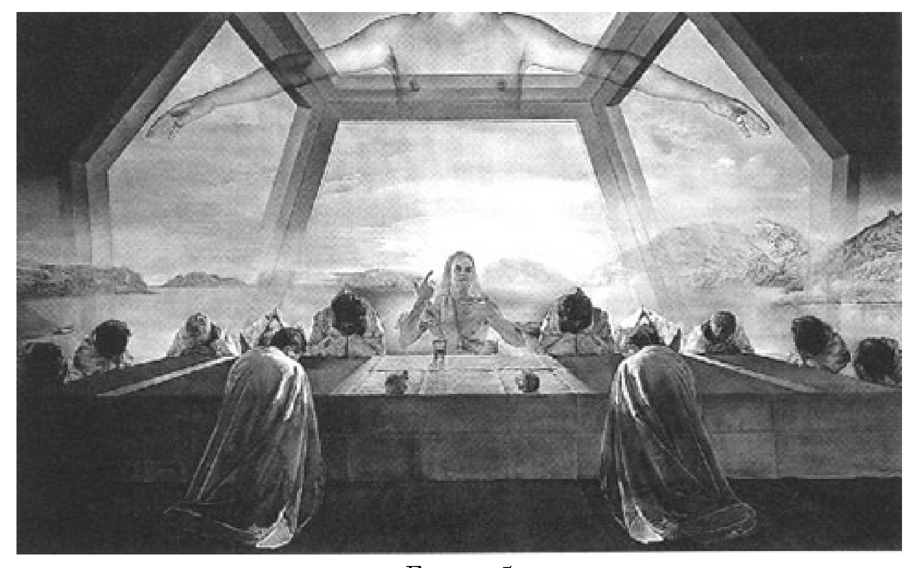


FIGURA 5

Un examen detallado de los ejemplos que nos proporciona la naturaleza y el arte revela cuestiones a tres niveles distintos, cada uno de mayor profundidad que el anterior. En primer lugar nos encontramos con las preguntas inmediatas: *a*) ¿Son reales todas las formas que adopta phi en la naturaleza y en las artes citadas en la literatura o simplemente representan conceptos erróneos e interpretaciones precipitadas? *b*) ¿Podemos explicar el aspecto de phi (si es real) en estas u otras circunstancias? En segundo lugar, si definimos «belleza» como aparece, por ejemplo, en el *Webster's Unabridged Dictionary*, es decir, «la cualidad que hace que un objeto resulte placentero o satisfactorio de un modo determinado», nos surge la siguiente pregunta: ¿existe un componente estético en las matemáticas? Y si es así, ¿cuál es la esencia de ese componente? Ésta es una pregunta importante porque como dijo en una ocasión el estadounidense Richard Buckminster Fuller (1895-1983), arquitecto, matemático e ingeniero: «Cuando trabajo con un problema, jamás pienso en la belleza. Sólo pienso en cómo resolverlo. Pero cuando he terminado, si la solución no es bella, sé que está mal.» Para terminar, la pregunta más intrigante: ¿Qué provoca que las matemáticas sean tan poderosas y ubicuas? ¿Qué razón existe para que las matemáticas y las constantes numéricas como la Proporción Áurea tengan un papel central en materias tan diferentes como las teorías fundamentales del universo o el mercado de valores? ¿Existen las matemáticas independientemente de los humanos, quienes la han descubierto/ inventado y formulado sus principios? ¿Es matemática la propia naturaleza del universo? Esta última pregunta puede reformularse utilizando un conocido aforismo del físico británico Sir James Jeans (1847-1946): ¿Es Dios un matemático?

Intentaré tratar con cierto detalle todas estas preguntas a lo largo del libro a través de la fascinante historia de phi. La, a menudo, embrollada historia de esta proporción cubre tanto milenios como continentes. También es importante destacar mi intención de contar una buena historia de interés humano, ya que gran parte de ella girará en torno a una época en que «científicos» y «matemáticos» eran individuos que únicamente intentaban resolver preguntas que despertaban su curiosidad. Muchos de ellos trabajaron y murieron sin saber si su trabajo cambiaría el curso del pensamiento científico o si simplemente desaparecería sin dejar rastro.

Sin embargo, antes de embarcarnos en nuestro viaje, debemos familiarizarnos con los números en general y con la Proporción Áurea en particular. Al fin y al cabo, ¿cómo surgió la idea inicial de la Proporción Áurea? ¿Por qué Euclides sintió la necesidad de definir la división de una línea? El objetivo de este libro es introducir al lector en los auténticos orígenes de lo que podríamos denominar Numerismo Áureo. Para conseguir este objetivo, a continuación realizaremos una breve exploración del amanecer de las matemáticas.

2
EL TONO Y EL PENTAGRAMA

Si las leyes matemáticas se refieren a la realidad, no son ciertas; y si son ciertas, no se refieren a la realidad.

ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

Veo un cierto orden en el universo, y las matemáticas son el modo de hacerlo visible.

MAY SARTON (1912-1995)

Nadie sabe con exactitud cuándo empezaron los humanos a contar, es decir, a medir lo múltiple de un modo cuantitativo. De hecho, ni tan siquiera sabemos con seguridad si números como «uno», «dos», «tres» (los números cardinales) precedieron a números como «primero», «segundo», «tercero» (los números ordinales) o viceversa. Los números cardinales simplemente determinan la pluradidad de un conjunto de elementos, tales como el número de niños de un grupo. Por otro lado, los números ordinales especifican el orden y la sucesión de elementos específicos de un grupo, tales como una fecha del mes o un asiento numerado en una sala de conciertos. En un principio se creía que el contar se desarrolló específicamente para lidiar con las necesidades diarias, lo que representaba un claro argumento a favor de la primera aparición de los números cardinales. Sin embargo, algunos antropólogos sugieren que los números pudieron hacer su aparición en la historia a partir de algunos rituales que requerían la aparición sucesiva de individuos (en un orden específico) durante las ceremonias. Si esto fuera cierto, la idea nos sugiere que el concepto del número ordinal podría haber precedido al cardinal.

Evidentemente, era necesario un salto mental aún mayor para pasar del simple cómputo de objetos al entendimiento como tal de los números como cantidades abstractas. Por tanto, mientras que las primeras nociones de

los números podían haber estado relacionadas con los *contrastes*, asociados quizás a la supervivencia (¿es eso *un* lobo o una *manada* de lobos?), el verdadero entendimiento de que dos manos y dos noches eran sendas manifestaciones del número 2, probablemente tardaron siglos en asimilarlo. El proceso debía pasar por el reconocimiento de similitudes (en oposición a los contrastes) y correspondencias. Muchas lenguas contienen vestigios del divorcio en origen entre el simple acto de contar y el concepto abstracto de los números. Por ejemplo, en las Islas Fiji, el término que designa diez cocos es «koro», mientras que para diez barcas es «bolo». Del mismo modo, entre los Tauade de Nueva Guinea, se usan palabras diferentes para hablar de los pares masculinos, pares femeninos y pares mixtos. Hasta en inglés se asocian nombres diferentes a los mismos números de diferentes grupos. Se dice «*a yoke of oxen*» pero nunca «*a yoke of dogs*.»[1]

Seguramente, el hecho de que los humanos tengan tantas manos como pies, ojos o pechos ayudó al desarrollo del entendimiento abstracto del número 2. Sin embargo, aun así, debió llevar más tiempo asociar este número con cosas que no son idénticas, como el hecho de que existan dos grandes luces en el cielo, el Sol y la Luna. Pocos dudan que las primeras distinciones se hicieran entre uno y dos y después entre dos y «muchos». Se llegó a esta conclusión sobre la base de los resultados de los estudios llevados a cabo en el siglo XIX entre las poblaciones que no habían estado muy expuestas a la civilización dominante y a las diferencias lingüísticas que se aprecian en los términos empleados para números diferentes tanto en la Antigüedad como en tiempos modernos.

TRES SON MULTITUD

El primer indicio de que a los números mayores de dos se les trató en algún momento como «muchos» tiene unos cinco milenios de antigüedad. En lengua sumeria, en Mesopotamia, se denomina al número 3 «es», utilizado también como marca de pluralidad (como el sufijo *s* en inglés). De un modo similar, los estudios etnográficos de 1890 sobre los nativos de las islas del Estrecho Torres, entre Australia y Papúa Nueva Guinea, mostraron que utilizaban un sistema conocido como contar-dos. Utilizaban las palabras «urapun» para «uno», «okosa» para «dos», y combinaciones como «okosa-urapun» para «tres» y «okosa-okosa» para «cuatro». Para aquellos números superiores a «cuatro», los isleños utilizaban la palabra «ras» (muchos). Se han encontrado formas de nomenclaturas casi idénticas en otras poblaciones indígenas desde Brasil (los Botocudos) a Sudáfrica (Zulúes). Por ejemplo, los Aranda de Australia tenían «ninta» para «uno», «tara» para «dos»; por tanto, «tara mi ninta» para «tres» y «tara ma tara» para «cuatro», y el resto de números expresados como «muchos». Se descubrió, además, que muchas de estas poblaciones tendían a agrupar las cosas por parejas en lugar de contarlas individualmente.

He aquí una pregunta interesante: ¿por qué evolucionaron hasta el «cuatro» las lenguas utilizadas en estos y otros sistemas de cómputo y después se detuvieron (aunque tres y cuatro ya se expresaban con los términos uno y dos)? Una explicación sería que esto simplemente refleja el hecho de que tenemos cuatro dedos en nuestras manos en una posición similar. Otra idea, más sutil, propone que la respuesta está en el límite psicológico de la percepción visual humana. Muchos estudios demuestran que el mayor número que somos capaces de captar de un vistazo, *sin contar*, es de cuatro o cinco. Seguramente recordarán cómo, en una escena del largometraje *Rain Man*, Dustin Hoffman, en el

papel de un autista con una inusual (y de hecho muy exagerada) percepción y memoria para los números, esparcía por el suelo todos los palillos de una caja excepto cuatro y cómo de un solo vistazo era capaz de decir que había 246 palillos. Pues bien, la mayoría de la gente sería incapaz de realizar una hazaña semejante. Cualquiera que haya intentado alguna vez cuadrar votos de cualquier tipo estará de acuerdo. Normalmente, apuntamos los primeros cuatro votos en cuatro líneas rectas y cuando contamos el quinto voto, trazamos una línea a través, simplemente debido a la dificultad de percibir de un vistazo cualquier número de líneas superior a cuatro. Este sistema es conocido en los *pubs* ingleses (donde el barman cuenta las cervezas que se piden) como la puerta de cinco barras. Curiosamente, un experimento descrito por el historiador de matemáticas Tobias Dantzig (1884-1956) en 1930 (en su maravilloso libro *Number, the Language of Science*) nos sugiere que algunos pájaros también son capaces de reconocer y distinguir entre un máximo de cuatro objetos. He aquí la historia de Dantzig:

> Un caballero estaba dispuesto a disparar a un cuervo que había hecho un nido en la torre del reloj de su finca. Había tratado de sorprender al pájaro en repetidas ocasiones, pero había sido en vano: en cuanto se acercaba, el cuervo abandonaba inmediatamente su nido. Desde otro árbol aguardaba vigilante a que el hombre abandonara la torre y así volver a él. Un día, al caballero se le ocurrió una estratagema: dos hombres entraron en la torre, uno permaneció dentro, el otro salió y se marchó. Pero no engañaron al pájaro: se mantuvo alejado hasta que salió el hombre que aguardaba dentro. Repitió el experimento los días siguientes con dos, tres, hasta cuatro hombres, pero sin éxito. Finalmente, fueron enviados cinco hombres: como en anteriores ocasiones, todos entraron en la torre y uno permaneció dentro mientras los otros cuatro salieron y se marcharon. Fue entonces cuando el cuervo perdió la cuenta. Incapaz de distinguir entre cuatro y cinco, se apresuró a regresar a su nido.

Existen más evidencias que sugieren que los primeros sistemas de cómputo siguieron la filosofía del «uno, dos… muchos.» Esto tenía su origen en las diferencias lingüísticas en el tratamiento de los plurales y las fracciones. Por ejemplo, en hebreo, hay una forma especial del plural para algunos pares de elementos idénticos (manos, pies) o para palabras que representan objetos que contienen dos partes idénticas (pantalones, gafas, tijeras) que es diferente del plural normal. Así, mientras los plurales normales acaban en «im» (si los objetos se consideran masculinos) o en «ot» (si son femeninos), la forma plural para ojos, pechos, etc., o las palabras para objetos con dos partes idénticas, acaban en «ayim». Existen formas similares en finés, y solían haberlas en checo (hasta la Edad Media). Y lo que es aún más importante, la transición a fracciones, que claramente indica un nivel más alto de familiaridad con los números, se caracteriza por una remarcable diferencia lingüística en lo que se refiere a los nombres de las fracciones que no sean una mitad. En las lenguas indoeuropeas, y en algunas que no lo son (húngaro, hebreo), los nombres de las fracciones «un tercio» ($^1/_3$), «un quinto» ($^1/_5$), etc., generalmente derivan de los nombres de los números de los que estas fracciones son recíprocas (tres, cinco, etc.). Por ejemplo, en hebreo el número «tres» es «shalosh» y «un tercio» es «shlish». En húngaro «tres» es «Hàrom» y «un tercio» es «Harmad». Sin embargo, no ocurre lo mismo con el número «mitad» que no está relacionado con «dos». Por ejemplo, en rumano «dos» es «doi» y «mitad» es «jumate»; en hebreo, «dos» es «shtayim» y «mitad» es «hetsi»; en húngaro «dos» es «kettö» y «mitad» es «fél.» Por tanto, podemos suponer que mientras que el número $^1/_2$ se entendió relativamente pronto, la noción y comprensión de otras fracciones como recíprocas (como, por

ejemplo, «uno sobre») de números enteros, probablemente se desarrolló cuando el cómputo pasó la barrera del «tres son multitud».

CONTAR MIS INNUMERABLES DEDOS

Incluso antes de que se desarrollaran del todo los sistemas de cómputo, los humanos tenían que ser capaces de registrar algunas cantidades. Los vestigios arqueológicos más antiguos que parecen estar relacionados con el hecho de contar consisten en huesos en los que se han realizado unas incisiones espaciadas con una cierta regularidad. La más antigua, fechada en el 35.000 a.C., es parte del fémur de un babuino encontrado en una cueva en las Montañas Lembedo en África: tenía veintinueve incisiones. En 1937, el arqueólogo Karel Absolon encontró en Dolné Vĕstonice (Checoslovaquia) otro registro del «libro de contabilidad» en un hueso de lobo con cincuenta y cinco escisiones (veinticinco en una serie y treinta en la otra, la primera agrupada de cinco en cinco), que ha sido fechada en la era Auriñaciense (aproximadamente hace unos 30.000 años). En particular, el hecho de agruparlos de 5 en 5 sugiere el concepto de *base*, que comentaré más adelante. Aunque no sabemos el propósito exacto de estas incisiones, podemos deducir que quizás se utilizaron para registrar las matanzas de un cazador. El agruparlas habría ayudado al cazador a llevar la cuenta sin necesidad de recontar con cada nueva muesca que hiciera. Se han encontrado huesos similares en Francia y en la cueva Pekarna de la República Checa fechados en la era Magdaleniense (hace unos 15.000 años).

Se ha especulado mucho sobre el hueso Ishango, encontrado por el arqueólogo Jean de Heinzelin en Ishango, cerca de la frontera entre Uganda y El Zaire (figura 6). El hueso, mango de una herramienta, fechado sobre el 9.000

a.C., muestra tres filas de muescas dispuestas, respectivamente, en los siguientes grupos: (i) 9, 19, 21, 11; (ii) 19, 17, 13, 11; (iii) 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3. La suma de los números en cada una de las dos primeras filas es 60, lo que llevó a algunos a pensar que podría tratarse de un registro de las fases de la Luna en dos meses lunares (teniendo en cuenta la posibilidad de que algunas de las incisiones de la tercera fila se podrían haber borrado, ya que sólo suman 48). Se han propuesto otras interpretaciones más complicadas (y mucho más especulativas). Por ejemplo, basándonos en el hecho de que la segunda fila (19, 17, 13, 11) contiene primos secuenciales (números que carecen de divisores excepto 1 y el número mismo), y que la primera fila (9, 19, 21, 11) contiene números diferentes del 10 o 20 por 1 número, de Heinzelin concluyó que el pueblo de Ishango poseía un conocimiento rudimentario de la aritmética e incluso de los números primos. Por supuesto, muchos investigadores consideran esta interpretación demasiado osada.

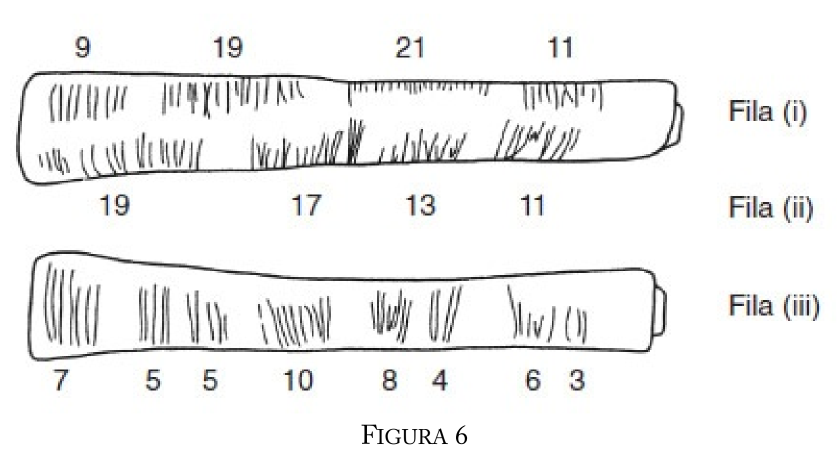


FIGURA 6

Oriente Medio ha producido otro sistema de registro interesante que data del periodo entre el noveno y el segundo milenio a.C. En un espacio comprendido entre

Anatolia, al norte, y Sudán, al sur, los arqueólogos han encontrado una gran cantidad de pequeños objetos con aspecto de juguetes de diferentes tamaños hechos de arcilla. Tienen forma de discos, conos, cilindros, pirámides, animales y otros. La arqueóloga Denise Schmandt-Besserat, de la Universidad de Texas, en Austin, que estudió estos objetos a finales de la década de los 70, desarrolló una teoría fascinante. Schmandt-Besserat cree que estos objetos de arcilla servían como pictogramas simbólicos en el mercado, representando los tipos de objetos que se contaban. Así, una pequeña esfera de arcilla podría representar una cantidad de grano, un cilindro una cabeza de ganado, etc. Por tanto, según la hipótesis de Schmandt-Besserat, los comerciantes del Oriente Medio prehistórico podrían haber llevado la cuenta de sus negocios simplemente alineando estos objetos según el tipo de mercancía con la que se estaba haciendo la transacción.

Cualesquiera que fueran los símbolos empleados para los diferentes números-incisiones en los huesos, objetos de arcilla, nudos en cuerdas (denominados quipu, utilizados por los incas), o simplemente los dedos, en algún momento de la historia, los humanos se enfrentaron al reto de ser capaces de representar y manipular cifras altas. Por razones prácticas, no puede sobrevivir ningún sistema de símbolos que únicamente tenga un nombre diferente o un objeto diferente que represente cada uno de los números. Del mismo modo que las letras del alfabeto representan de alguna manera el número mínimo de caracteres con el que podemos expresar todo nuestro vocabulario, así como todo el conocimiento escrito, debía adoptarse un conjunto mínimo de símbolos con el que todos los números pudieran representarse. Esta necesidad llevó al concepto de un conjunto «base», es decir, la idea de que los números se pueden agrupar

jerárquicamente según unas ciertas unidades. La base 10 nos resulta tan familiar en nuestra vida cotidiana que es difícil imaginar que se pudieran haber elegido otras bases.

La idea de la base 10 resulta bastante simple, lo que significa que no tardó en desarrollarse. Agrupamos nuestros números de modo que diez unidades en un nivel corresponden a una unidad en un nivel superior en la jerarquía. Así, 10 «unos» corresponde a 1 «diez», 10 «dieces» corresponden a 1 «cien», 10 «cienes» a 1 «mil» y así sucesivamente. Los nombres de los números y la posición de los dígitos también representan esta agrupación jerárquica. Por ejemplo, cuando escribimos el número 555, aunque repetimos la misma cifra tres veces, cada vez significa algo diferente. El primer dígito a la derecha representa 5 unidades, el segundo representa 5 decenas o 5 veces 10, y el tercero 5 centenas o 5 veces 10 al cuadrado. Esta regla tan importante de posición, el *sistema de lugar-valor*, fue inventada por los babilonios (usando el 60 como base, como se explica más adelante) en el segundo milenio a.C. y más tarde, en un periodo de unos 2.500 años, se reinventó, sucesivamente, en China, en América Central, por los Mayas, y en la India.

De todas las lenguas indoeuropeas, el sánscrito, originario del norte de la India, proporciona algunos de los textos más antiguos. Concretamente, cuatro de los antiguos escritos del hinduismo, que datan del siglo v a.C., contienen en el título la palabra sánscrita «veda» (conocimiento). En sánscrito, los números del 1 al 10 tienen nombres diferentes: eka, dvau, trayas, catvaras, pañca, ṣaṭ, sapta, aṣṭau, náva, daśa. Los números del 11 al 19 son simplemente una combinación del número de la unidad y 10. Por ejemplo, 15 es «pañca-daśa» 19 es «náva-daśa», etc. En inglés, por

ejemplo, esto equivale a los números «*teen*».[2] Por cierto, si se preguntan de dónde vienen «*eleven*» (11) y «*twelve*» (12), sepan que «*eleven*» deriva de «an» (uno) y «lif» (*left* o lo que queda), y «*twelve*» de «two» (dos) y «lif» (dos *left*). Es decir que estos números representan «*one left*» y «*two left*» después de diez[3]. Como ocurre en inglés, los nombres en sánscrito para las decenas (veinte, treinta, etc.) expresan la unidad y el plural de diez (por ejemplo, 60 es ṣaṣti), y todas las demás lenguas indoeuropeas poseen una estructura muy similar en su vocabulario para los números. Por lo tanto, es evidente que los que utilizaban estas lenguas adoptaron el sistema de base 10.

Pocos dudan de que la popularidad casi universal de la base 10 deriva simplemente del hecho de que tengamos diez dedos. Esta posibilidad ya fue expresada por el filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) cuando se preguntaba (en *Problemata*): «¿Por qué todos los hombres, tanto griegos como bárbaros, cuentan hasta diez y no hasta cualquier otro número?» En realidad, la base 10 no presenta ningún tipo de superioridad sobre, pongamos, la base 13. Hasta podríamos argumentar teóricamente que el hecho de que el número 13 sea un número primo, divisible sólo por 1 y por sí mismo, le da ventaja sobre 10, ya que la mayoría de fracciones serían irreductibles en un sistema semejante. Por ejemplo, mientras que con la base 10 el número $^{36}/_{100}$ puede también expresarse como $^{18}/_{50}$ o $^{9}/_{25}$, estas representaciones múltiples no existirían con una base prima como 13. De todos modos, la base 10 ganó porque diez dedos destacaban ante los ojos de todo ser humano y eran fáciles de usar. En algunas lenguas malayo-polinesias, la palabra para «mano», «lima», es en realidad la misma que para la palabra «cinco». ¿Significa que todas las civilizaciones conocidas escogieron 10 como base? Pues no.

De las demás bases que han utilizado otras poblaciones del mundo, la más común es la base 20, conocida como la base vigesimal. En este sistema de cómputo, que fue muy popular en no pocos territorios de Europa Occidental, se contaba sobre la base de grupos de 20, no de 10. La elección de este sistema proviene de la combinación de los dedos de las manos y de los pies para formar una base mayor. Por ejemplo, para los Inuit (esquimales), el número «veinte» se expresa con una frase que significa «un hombre está completo». Algunas lenguas modernas poseen restos de este sistema vigesimal. Por ejemplo, en francés el número 80 es «quatre-vingts» (cuatro veintes), y existe una forma arcaica para «six-vingts» (seis veintes). Hay un ejemplo aún más extremo en un hospital parisino del siglo XIII, el cual todavía conserva el nombre L'Ôpital de Quinze-Vingts (El Hospital de los Quince Veintes) porque en un principio fue diseñado para disponer de 300 camas para los veteranos ciegos. De igual modo, en irlandés, 40 es «daichead», que deriva de «da fiche» (dos veces veinte); en danés, los números 60 y 80 («tresindstyve» y «firsindstyve», respectivamente, «tres» y «firs» abreviados) son literalmente «tres veintes» y «cuatro veintes».

Probablemente, la base más desconcertante de la Antigüedad, o de cualquier otra época, es la base 60 o sistema sexagesimal. Era el sistema utilizado por los sumerios en Mesopotamia, y aunque sus orígenes se remontan al cuarto milenio a.C., esta división ha sobrevivido hasta nuestros días en el modo en que representamos el tiempo en horas, minutos y segundos, o en los grados del círculo (y la subdivisión de los grados en minutos y segundos). El 60 como base de un sistema numeral pone a prueba la memoria de un modo considerable, ya que un sistema tal requiere en principio un único nombre o símbolo

para todos los números del 1 al 60. Conscientes de esta dificultad, los antiguos sumerios utilizaron un truco para hacer que los números fueran más fáciles de recordar: insertaron el 10 como paso intermedio. La introducción del 10 les permitió disponer de nombres únicos para los números del 1 al 10; los números del 10 al 60 (en unidades de 10) representaban combinaciones de nombres. Por ejemplo, la palabra sumeria para 40, «nišmin», es una combinación de la palabra para 20, «niš», y la palabra para 2, «min». Si escribimos el número 555 con un sistema puramente sexagesimal, lo que queremos decir es $5 \times (60)^2 + 5 \times (60) + 5$, o 18.305 en nuestra notación de base 10.

Se han realizado muchas especulaciones sobre la lógica o las circunstancias que llevaron a los sumerios a escoger la inusual base 60. Algunos se basan en las especiales propiedades matemáticas del número 60: es el primer número divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6. Otras hipótesis pretenden relacionar el 60 con conceptos como el número de meses en un año o los días en un año (redondeado hasta 360), combinados de algún modo con el número 5 o 6. Recientemente, el profesor de matemáticas y escritor Georges Ifrah argumentó en su excelente libro del año 2000, *The Universal History of Numbers*, que el número 60 podría haber sido la consecuencia de la mezcla de dos poblaciones inmigrantes, una que utilizaba la base 5 y otra que utilizaba la 12. Es evidente que la base 5 tuvo su origen en el número de dedos de una mano, y aún se pueden hallar vestigios de esta base en algunas lenguas como el khmer, en Camboya, o de modo más evidente en el saraveca, en Sudamérica. La base 12, con muchos ejemplos hoy en día, como, por ejemplo, el sistema británico de pesos y medidas, pudo haber tenido sus orígenes en el número de articulaciones en los cuatro dedos (excluyendo el pulgar, que se usa para

contar). Por cierto, las más extrañas bases aparecen en los lugares más curiosos. En *Las aventuras de Alicia en el País de las Maravillas* de Lewis Carroll, Alicia, para asegurarse de que entiende los extraños sucesos a su alrededor, se dice: «Intentaré, si sé, todas las cosas que solía saber. Veamos: cuatro por cinco son doce, y cuatro por seis son 13, y cuatro por siete son, ¡cielos!, jamás llegaré a veinte si sigo así». En sus anotaciones al libro de Carroll, *Alicia Anotada*, el famoso matemático y autor de ficción Martin Gardner nos ofrece una buena explicación para la extraña tabla de multiplicar de Alicia. Nos propone que Alicia simplemente utiliza bases diferentes a 10. Por ejemplo, si utilizamos la base 18, entonces, 4 × 5 = 20 es evidente que será 12 porque 20 es 1 unidad de 18, y 2 unidades de 1. Naturalmente, lo que hace que esta explicación sea convincente es el hecho de que Charles Dodgson («Lewis Carroll» era un seudónimo) fuera profesor de matemáticas en Oxford.

NUESTROS NÚMEROS, NUESTROS DIOSES

Independientemente de la base que escogiera cualquiera de las antiguas civilizaciones, el primer grupo de números apreciado y entendido a un cierto nivel fue el grupo de los números enteros (o números *naturales*). Se trata de los familiares 1, 2, 3, 4… Una vez los humanos asimilaron en su conciencia la comprensión de estos números en tanto cantidades abstractas, no tardaron mucho en empezar a atribuirles propiedades especiales. Desde Grecia a India, se otorgó a los números cualidades y poderes secretos. Algunos textos antiguos indios aseguran que los números son casi divinos, de «naturaleza brahma». Estos manuscritos contienen frases muy cercanas a la adoración de los números (como «saludos al uno»). Del mismo modo, una famosa máxima del matemático griego Pitágoras (cuya vida y obra

describiremos más adelante en este mismo capítulo) sugiere que «todo está dispuesto en función del número». Este parecer llevó, por un lado, a importantes desarrollos en la teoría del número, pero también al desarrollo de la *numerología (*conjunto de doctrinas según las cuales todos los aspectos del universo están asociados con los números y sus idiosincrasias). Para el numerólogo, los números son realidades fundamentales, por lo que extraen significados simbólicos de la relación entre los cielos y las actividades humanas. Es más, ningún número mencionado en las sagradas escrituras ha sido considerado irrelevante. Algunas formas de numerología afectaron a naciones enteras. Por ejemplo, en el año 1240 los cristianos y judíos de la Europa occidental esperaban la llegada de un rey mesiánico provinente del este, ya que resulta que el año 1240 del año cristiano correspondía al año 5000 del calendario judío. Antes de tachar a estos sentimientos de inocencia romántica que sólo se podrían producir muchos siglos atrás, deberíamos recordar el extravagante espectáculo que acompañó al fin del último milenio.

Una versión especial de la numerología es la Gematría judía (posiblemente basada en el «número geométrico» en griego), o sus análogos musulmán y griego, conocidos como el Khisab al Jumal (calcular el total) y Isopsephi (del griego «isos», igual, y «psēphizein», contar), respectivamente. En estos sistemas, se les asigna a los números una letra del alfabeto correspondiente (normalmente el hebreo, griego, árabe o latín). Al sumar los valores de las letras constituyentes, los números se asocian a palabras o incluso a frases enteras. La Gematría fue especialmente popular en el sistema de misticismo judío, practicado principalmente del siglo XIII al XVIII, conocido como cábala. Los especialistas hebreos suelen sorprender a la audiencia nombrando una

serie de números aparentemente al azar durante diez minutos y después repitiendo la serie sin cometer ni un solo error. Esta azaña se consigue al traducir algún pasaje de las escrituras hebreas al lenguaje de Gematría.

Uno de los ejemplos más famosos de la numerología se asocia con el 666, el «número de la Bestia». La «Bestia» se ha identificado con el Anticristo. El texto del Libro de las Revelaciones (13-18) dice así: «Aquí está la sabiduría. Deja a aquel que posea entendimiento calcular el número de la bestia, pues éste es el número del hombre: su número es 666».La frase «es el número del hombre» llevó a muchos místicos cristianos a intentar identificar a los personajes históricos cuyos nombres en Gematría o Isopsephi dieran el valor 666. Estas investigaciones llevaron a nombres como el de Nerón César y al del emperador Diocleciano, ambos perseguidores de los cristianos. En hebreo, Nerón César se escribe (de derecha a izquierda) נרון קסר, y los valores asignados en la Gematría a las letras hebreas (de derecha a izquierda), 50, 200, 6, 50 y 100, 60, 200 dan 666. Igualmente, cuando se cuentan sólo las letras que también son numerales romanos (D, I, C, L, V) del nombre en latín del emperador Diocleciano, DIOCLES AVGVSTVS, también suman 666 (500 + 1 + 100 + 50 + 5 + 5 + 5). Evidentemente, todas estas asociaciones no son sólo extravagantes sino también artificiosas (por ejemplo, al deletrear en hebreo la palabra César, en realidad se omite una letra de valor 10 en el deletreo más común).

Curiosamente, en 1994, incluso se «descubrió» (y apareció en el *Journal of Recreational Mathematics*) una relación entre «el número de la Bestia» y la Proporción Áurea. Con la ayuda de una calculadora científica de bolsillo, se pueden usar las funciones trigonométricas seno y

coseno para calcular el valor de la expresión {sen 666^0 + cos $(6 \times 6 \times 6)^0$}. Simplemente introduce 666, presiona la tecla {sen} y guarda el número; a continuación introduce 216 (= 6 × 6 × 6) y presiona la tecla {cos}, y añade el número que obtengas al número que has guardado. El número que obtengas es una buena aproximación al negativo de phi. Curiosamente, el presidente Ronald Reagan y Nancy Reagan se cambiaron de dirección en California del 666 de St. Cloud Road al 668 para evitar el número 666. El 666 era la combinación de la misteriosa maleta de la película de Quentin Tarantino, *Pulp Fiction*.

Encontramos una clara fuente de la actitud mística hacia los números enteros en la manifestación de dichos números en los cuerpos de los humanos y los animales y en el cosmos tal y como lo percibieron las culturas anteriores. No sólo los humanos tienen el número 2 expuesto por todo su cuerpo (ojos, manos, fosas nasales, pies, orejas, etc.) sino que además hay dos géneros, el sistema Sol-Luna, etc. Además, nuestro tiempo subjetivo se divide en tres tiempos verbales (pasado, presente y futuro) y debido al hecho de que el eje de rotación de la tierra señala más o menos hacia la misma dirección (aproximadamente en dirección a la estrella Polar, «Polaris», aunque existan pequeñas variaciones, como se describe en el capítulo 3) tenemos cuatro estaciones al año. Las estaciones simplemente reflejan el hecho de que la orientación del eje de la tierra con relación al sol cambia en el curso de un año. Cuanto más directamente se exponga una parte de la tierra a la luz solar, más durarán las horas de sol y más subirá la temperatura. En general, los números actuaron en muchas circunstancias como mediadores entre los fenómenos cósmicos y la rutina diaria de los humanos. Por ejemplo, los nombres de los siete días de la semana se

basaron en los nombres de los objetos celestes que en un principio se consideraron planetas: el Sol, la Luna, Marte, Mercurio, Júpiter, Venus y Saturno.

Los números enteros se dividen en pares e impares y nadie hizo más que los pitagóricos para diferenciar los números pares e impares y otorgarles toda una colección de propiedades a estas diferencias. En concreto, veremos que podemos identificar la fascinación pitagórica por el número 5 y su admiración por la estrella de cinco puntas como consecuencia del ímpetu inicial por el interés en la Proporción Áurea.

PITÁGORAS Y LOS PITAGÓRICOS

Pitágoras nació alrededor del 570 a.C. en la Isla de Samos, en el mar Egeo, cerca de Asia Menor, y emigró entre el 530 y 510 a Crotona, situada en la colonia doria del sur de Italia (conocida entonces como la Magna Grecia). Parece ser que Pitágoras abandonó Samos para escapar de la represora tiranía de Polícrates (muerto circa 522 a.C.), quien estableció la supremacía naval de Samos en el mar Egeo. Quizás siguiendo el consejo de quien se cree fue su maestro, el matemático Tales de Mileto, Pitágoras vivió en Egipto durante un tiempo (unos 22 años según algunas fuentes), donde habría aprendido de los sacerdotes egipcios matemáticas, filosofía y temas religiosos. Tras la invasión de Egipto por parte de las tropas persas, Pitágoras pudo haber sido llevado a Babilonia junto a otros sacerdotes egipcios. Allí pudo entrar en contacto con la tradición matemática mesopotámica. De todos modos, la matemática egipcia y babilónica habrían resultado insuficientes para la curiosa mente de Pitágoras. Para estos dos pueblos, las matemáticas proporcionaban prácticas herramientas en forma de

«recetas» diseñadas para cálculos específicos. Sin embargo, Pitágoras fue uno de los primeros en entender los números como entidades abstractas con existencia propia.

En Italia, Pitágoras empezó a enseñar filosofía y matemáticas, creando rápidamente un entusiasta grupo de seguidores, incluyendo a la joven y bella Theano (hija de su anfitrión Milo) con la que más tarde se casó. La atmósfera de Crotona fue extremadamente fértil para las enseñanzas de Pitágoras, ya que la comunidad estaba compuesta por una plétora de cultos semi-místicos. Pitágoras estableció una estricta rutina para sus estudiantes, prestando especial atención a la hora de despertarse y la hora de dormir. Se aconsejaba a los estudiantes que al levantarse repitieran los siguientes versos:

Tan pronto como te despiertes en orden pon
las acciones a hacer en el día que empieza

De igual modo, por la noche tenían que recitar:

No permitas que el sueño cierre tus ojos
si antes no has pensado tres veces en
las acciones del día. ¿Qué hechos
bien realizados, cuáles no, qué me falta?

La mayoría de detalles de la vida de Pitágoras y la realidad de sus contribuciones matemáticas permanecen tras un velo de incertidumbre. Cuenta una leyenda que tenía una marca de nacimiento dorada en su muslo que hizo pensar a sus seguidores que indicaba que era hijo del dios Apolo. Ninguna biografía de Pitágoras escrita en la antigüedad ha sobrevivido, y las biografías escritas con posterioridad, como la *Vidas de los filósofos ilustres*, escrita por Diógenes Laercio en el siglo III, a menudo se basan en fuentes de dudosa fiabilidad. Parece ser que Pitágoras no escribió nada, pero su

influencia fue tan grande que el más atento de sus seguidores creó una sociedad secreta o hermandad conocida como los pitagóricos. Aristipo de Cirene nos cuenta en su *Relato sobre los filósofos naturales* que Pitágoras basó la etimología de su nombre en el hecho de que decía la verdad (*agoreuein*) como el Dios en Delfos (*tou Pythiou*).

Los sucesos que rodean la muerte de Pitágoras son tan inciertos como los hechos de su vida. Según una versión, la casa de Crotona en la que residía fue incendiada por una turba envidiosa de la elite pitagórica, que asesinó al mismo Pitágoras durante su huida, cuando llegó a un lugar lleno de judías que no pudo atravesar. El científico y filósofo griego Dicaerco de Messana (circa 355-280 a.C.) nos ofrece una versión distinta: Pitágoras logró escapar hasta el Templo de las Musas en Metapontum, donde murió de hambre por propia voluntad al cabo de 40 días. Hermipo nos cuenta una historia totalmente diferente según la cual Pitágoras murió a manos de los habitantes de Siracusa durante la guerra contra el ejército de Agrigento, del que Pitágoras formaba parte.

Aunque es prácticamente imposible atribuir con toda certeza cualquier logro matemático específico a Pitágoras o a sus seguidores, no cabe duda de que han sido los responsables de una mezcla de matemáticas, filosofía de vida y religión, sin parangón en la historia. Por lo que a esto se refiere, sería interesante destacar la coincidencia histórica de que Pitágoras fuera contemporáneo de Buda y Confuncio.

De hecho, se atribuye a Pitágoras el haber acuñado las palabras «filosofía» (amor por la sabiduría) y «matemáticas» (lo que se aprende). Para él, un «filósofo» era alguien que «se dedica completamente a descubrir el sentido y propósito de la vida… a mostrar los secretos de la naturaleza». Pitágoras hizo hincapié en la importancia de aprender por encima de

cualquier otra cosa porque, en sus propias palabras, «la mayoría de hombres y mujeres, por nacimiento o naturaleza, carece de los medios para avanzar en riqueza y poder, pero poseen toda la habilidad para avanzar en conocimiento». También se hizo famoso por introducir la doctrina de la metempsicosis: teoría que cree en la inmortalidad del alma y en su renacimiento o trasmigración en reencarnaciones humanas o animales. Dicha doctrina derivó en una intensa defensa del vegetarianismo porque los animales que se iban a sacrificar podían representar a amigos reencarnados. Para purificar el alma, los pitagóricos establecieron reglas estrictas que incluían la prohibición de comer judías y un énfasis extremo en desarrollar la memoria. Aristóteles, el famoso filósofo griego, en su tratado *Sobre los pitagóricos*, ofrece diversas razones posibles para la abstinencia de judías: parecen genitales; al ser plantas sin partes parecen las puertas del infierno; se supone que las judías aparecieron al tiempo que los humanos en el acto de creación universal, o que las judías se utilizaban en las elecciones de los gobiernos oligárquicos.

Pitágoras y los pitagóricos se han hecho famosos por su papel en el desarrollo de las matemáticas, así como en la aplicación de las matemáticas al concepto del orden, tanto si es orden musical, orden del cosmos o el orden ético. Todos los niños aprenden en la escuela el teorema de Pitágoras del triángulo con un ángulo recto (90 grados), es decir, el triángulo rectángulo. Según este teorema (figura 7, a la derecha), el área del cuadrado construido sobre el lado más largo (la hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los lados más cortos. En otras palabras, si la longitud de la hipotenusa es c, entonces el área del cuadrado construido sobre ella es c^2; las áreas de los cuadrados construidos a los otros dos lados (de longitudes a

y *b*) son a^2 y b^2, respectivamente. El teorema de Pitágoras se puede formular de la siguiente manera: $c^2 = a^2 + b^2$ para todos los triángulos rectángulos. En 1971, cuando la República de Nicaragua seleccionó las diez ecuaciones matemáticas que cambiaron la faz de la tierra para una serie de sellos, el teorema de Pitágoras apareció en el segundo sello. Los números 3, 4, 5 o 7, 24, 25, por ejemplo, forman tripletes pitagóricos porque $3^2 + 4^2 = 5^2$ (9 + + 16 = 25); $7^2 + 24^2 = 25^2$, (49 + 576 = 625), y pueden usarse como longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

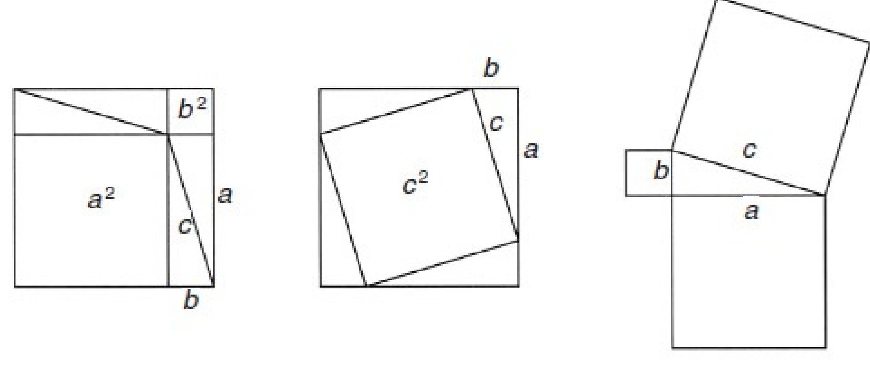


FIGURA 7

La figura 7 también sugiere lo que quizás es la demostración más fácil del teorema de Pitágoras: por un lado, cuando uno resta de un cuadrado cuyo lado es igual a $a + b$ el área de cuatro triángulos idénticos, se obtiene el cuadrado construido sobre la hipotenusa (figura central). Por otro lado, cuando uno resta del mismo cuadrado los mismos cuatro triángulos en una disposición diferente (figura izquierda) se obtienen los dos cuadrados construidos en los lados más cortos. Así, el cuadrado sobre la hipotenusa es claramente igual en área a la suma de los dos cuadrados más pequeños. En 1940, el matemático Elisha Scott Loomis, en su obra *The Pythagorean Proposition*, presentó 367 pruebas

del teorema de Pitágoras, incluyendo las pruebas de Leonardo da Vinci y el vigésimo presidente de los EE.UU., James Gardfield.

Aunque el teorema de Pitágoras aún no era conocido como una «verdad» que caracteriza a todos los triángulos de ángulo recto, los tripletes pitagóricos se habían descubierto mucho antes de la existencia de los pitagóricos. Una tablilla de arcilla babilónica procedente del periodo de la Antigua Babilonia (circa 1600 a.C.) contiene 15 de los tripletes mencionados.

Los babilonios descubrieron que los tripletes pitagóricos se pueden construir usando el siguiente y sencillo procedimiento, o «algoritmo». Escoja dos números enteros cualesquiera, p y q, teniendo en cuenta que p es mayor que q. Ahora ya puede formar el triplete pitagórico de números $p^2 - q^2$; $2pq$; $p^2 + q^2$. Por ejemplo, supongamos que q es 1 y p es 4. Entonces, $p^2 - q^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$; $2pq = 2 \times 4 \times 1 = 8$; $p^2 + q^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$. El conjunto de números 15, 8, 17 es un triplete pitagórico porque $15^2 + 8^2 = 17^2$, $(225 + 64 = 289)$. Se puede comprobar fácilmente que esto funcionará con todos los números enteros p y q. (Para el lector interesado, se expone una breve demostración en el apéndice 1.) Por lo tanto, existe un número infinito de tripletes pitagóricos (hecho probado por Euclides de Alejandría).

Sin embargo, en el mundo pitagórico, los modelos de orden no estaban solamente sujetos a los triángulos y la geometría. Tradicionalmente se conoce a Pitágoras como el descubridor de las notas armónicas de la escala musical, ya que descubrió que los intervalos musicales y el tono de las notas correspondían a las longitudes relativas de las cuerdas vibrantes. Observó que al dividir una cuerda en enteros consecutivos, se producían (hasta un cierto punto) intervalos

(consonantes) armoniosos y agradables. Cuando dos notas musicales arbitrarias suenan juntas, normalmente el sonido resultante es áspero (disonante) a nuestro oído. Tan sólo unas pocas combinaciones producen sonidos agradables. Pitágoras descubrió que estas extrañas consonancias se obtienen cuando las notas se producen por unas cuerdas similares cuyas longitudes se dan en una proporción dada por escasos primeros números enteros. Se obtiene el unísono cuando las cuerdas son de igual longitud (una proporción de 1:1); la octava se obtiene por una proporción de 1:2 de las longitudes de cuerda; la quinta por 2:3, y la cuarta por 3:4. En otras palabras, se puede puntear una cuerda y hacer sonar una nota. Si se puntea una cuerda igual de tensa que tenga la mitad de su longitud, se oirá una nota que es precisamente una octava armónica por encima de la primera. Del mismo modo, $^{6}/_{5}$ de una cuerda que da un Do da la nota La, $^{4}/_{3}$ de la misma cuerda da Sol, $3/_{2}$ da Fa, y así sucesivamente. Estos antiguos y extraordinarios hallazgos formaron la base de un conocimiento más avanzado de los intervalos musicales que se desarrolló en el siglo XVI (en los que, por cierto, Vincenzo Galilei, el padre de Galileo, estaba involucrado). Una maravillosa ilustración de Franchinus Gafurius, que apareció en 1492 como frontispicio de la *Theorica Musice*, muestra a Pitágoras experimentando con los sonidos de diversos instrumentos, incluyendo martillos, cuerdas, campanas y flautas (figura 8; la de la parte superior izquierda muestra la figura bíblica de Jubal o Tubal, «el padre de todo lo que maneja el arpa y el órgano»). Pero, se preguntaban los pitagóricos, si la armonía musical puede expresarse con números, ¿por qué no todo el cosmos? Por tanto, concluyeron que todos los objetos del universo debían sus características a la naturaleza del número. Por ejemplo, observaciones astronómicas sugieren que los movimientos

celestes también son extremadamente regulares y están sujetos a un orden específico. Esto último llevó al concepto de una hermosa «armonía de las esferas» (la idea que en sus movimientos regulares los cuerpos celestes también crean música armoniosa). El filósofo Porfirio (circa 232-304 d.C.), que escribió más de setenta obras que trataban sobre historia, metafísica y literatura, también escribió (como parte de su obra en cuatro volúmenes *Historia philosophiae*) una breve biografía de Pitágoras titulada *Vida de Pitágoras* en donde comentaba: «él mismo podía oír la armonía del Universo y comprender la música de las esferas, y las estrellas que se mueven en concierto con ellas, y que nosotros no podemos oír por las limitaciones de nuestra débil naturaleza». Tras enumerar otras exquisitas cualidades de Pitágoras, Porfirio añade: «Pitágoras afirmó que las Nueve Musas estaban formadas por los sonidos de los siete planetas, la esfera de las estrellas fijas, y por aquella que se opone a nuestra tierra, denominada la "la contra-tierra"» (esta última, según la teoría pitagórica del universo, da vueltas en oposición a la Tierra alrededor de un fuego central). El concepto de la «armonía de las esferas» fue de nuevo desarrollada, más de veinte siglos después, por el famoso astrónomo Johannes Kepler (1571-1630). Al ser testigo durante su propia vida de mucha agonía y de los horrores de la guerra, Kepler concluyó que, en realidad, la Tierra creó dos notas, *mi* por miseria (miseria en latín) y *fa* por hambruna (fames en latín). En palabras de Kepler: «la Tierra canta MI FA MI para que hasta por la mismísima sílaba puedas deducir que en este nuestro hogar domina la Miseria y la Hambruna».



FIGURA 8

La obsesión pitagórica por las matemáticas fue ligeramente ridiculizada por el gran filósofo griego Aristóteles. En su obra *Metafísica* (siglo IV a.C.) escribe lo siguiente: «Los que se denominan pitagóricos se dedican a las matemáticas, y fueron los primeros en desarrollar esta ciencia; y a medida que penetraron en ella, acabaron creyendo que sus principios eran los principios de todas las cosas». Hoy en día, aunque nos diviertan algunas de las ingeniosas ideas pitagóricas, hemos de reconocer que el pensamiento fundamental que se oculta tras ellas, de hecho no es muy diferente del expresado por Albert Einstein (en *Cartas a Solovina*): «las matemáticas sólo son una forma de expresar las leyes que gobiernan los fenómenos». Ciertamente, las leyes de la física, en ocasiones denominadas «leyes de la naturaleza», simplemente representan

formulaciones matemáticas del comportamiento que observamos y que todos los fenómenos naturales obedecen. Por ejemplo, la idea central en la teoría de la relatividad general de Einstein es que la gravedad no es una fuerza de atracción misteriosa que actúa en el espacio, sino más bien una manifestación vinculada inextricablemente a la geometría que une el espacio y el tiempo. Déjenme explicarles a través de un sencillo ejemplo cómo una propiedad geométrica del espacio puede percibirse como una fuerza de atracción como, por ejemplo, la gravedad. Imaginen a dos personas que empiezan a viajar exactamente hacia el norte partiendo desde dos puntos distintos del ecuador de la Tierra. Esto significa que, desde los puntos de salida, dichas personas viajan por líneas paralelas (dos longitudes) que, según la geometría sencilla que aprendemos en la escuela, jamás deberán encontrarse. De todos modos, es evidente que estas dos personas se encontrarán en el Polo Norte. Si estas personas no supieran que en realidad están viajando por la superficie curva de una esfera, llegarían a la conclusión de que han experimentado algún tipo de fuerza de atracción, ya que han llegado al mismo punto a pesar de haber empezado a moverse por líneas paralelas. Por tanto, la curvatura geométrica del espacio puede manifestarse como una fuerza de atracción. Probablemente, los pitagóricos fueran los primeros en reconocer el concepto abstracto según el cual las *fuerzas* básicas del universo pueden expresarse mediante el lenguaje de las matemáticas.

Quizás debido a las sencillas y armónicas proporciones halladas en la música, 1:2, 2:3, 3:4, los pitagóricos se sintieron especialmente intrigados por las diferencias entre los números pares e impares. Mientras que asociaron los números impares con los atributos masculinos, además de con la luz y la bondad (algo evidentemente poco inocente), a

los números pares les otorgaron atributos femeninos, asociándolos con la oscuridad y la maldad. Algunos de estos prejuicios persistieron durante siglos. Por ejemplo, el pensador romano Plinio el Viejo, que vivió entre el 23 y el 79 d.C., escribió en su *Historia Naturalis* (una enciclopedia de treinta y siete volúmenes sobre historia natural): «¿Por qué creemos que los números impares son los más efectivos para cualquier cometido?» De modo similar, en *Las alegres comadres de Windsor*, Shakespeare pone en boca de Sir John Falstaff (acto V, escena I) lo siguiente: «Dicen que hay divinidad en los números impares, o en la natividad, la suerte o la muerte». Las religiones de Oriente Medio actuaron de un modo parecido. Según la tradición musulmana, el profeta Mahoma comió una cantidad de días impares para poner fin a su ayuno, y las oraciones judías se asocian a un número impar (3, 7) de repeticiones.

Los pitagóricos no sólo asignaron cualidades a los números pares e impares en general, también atribuyeron propiedades especiales a números individuales. Así, se creía que el 1 era el generador de todos los números, y no se consideraba propiamente un número. Además, se creía que caracterizaba la razón. Geométricamente, el número 1 se representaba con el punto, que en sí mismo representaba el generador de todas las dimensiones. El número 2 era el primer número femenino, y también el número de la opinión y de la división. Sentimientos parecidos se expresan con el yin y el yang en la cosmología religiosa china, donde el yin representa el principio femenino y negativo, como la pasividad y la oscuridad, y el yang el principio masculino y luminoso. Aún hoy en día, en muchas lenguas, el número 2 se relaciona con la hipocresía y la desconfianza, como puede verse en expresiones como «doble» (falso), en iraní, o «de doble lengua», en alemán o árabe. La identificación del

número 2 con lo femenino y del 3 con lo masculino podría tener su origen en las configuraciones de los pechos femeninos y los genitales masculinos. Esta conclusión provisional se apoya en el hecho de que los Konso, de África Oriental, lo identifican de este modo. En la vida diaria la división en dos categorías resulta de lo más común: bueno y malo, arriba y abajo, derecha e izquierda. Geométricamente, el 2 se expresaba con la línea (determinada por dos puntos) de una dimensión. Se consideraba al tres como el primer número masculino real y el número de la armonía, ya que combinaba la unidad (el número 1) y la división (el número 2). Para los pitagóricos, el 3 era, de algún modo, el primer número real porque tenía un «principio», un «medio» y un «final» (el 2 sólo tiene un medio). La expresión geométrica del 3 era el triángulo, ya que tres puntos que no estén en la misma línea determinan un triángulo; además, el área del triángulo tiene dos dimensiones.

Curiosamente, el 3 fue también la base para la construcción de las unidades militares en la Biblia. Por ejemplo, en Samuel 2-23 se habla de los «tres guerreros», una unidad muy básica que tenía el Rey David. En este mismo capítulo se comenta con detalle los «treinta jefes» que «acudieron a unirse con David en la cueva de Adulam», pero al final del relato el editor bíblico concluye que «en total eran treinta y siete». Es obvio que «treinta» era la definición de la unidad, aunque el número real de sus miembros fuera algo diferente. En Jueces 7, cuando Gideón necesita luchar contra los medianitas, escoge a trescientos hombres, «todos aquellos que pudieran lamer el agua con sus lenguas». Si nos acercamos a unidades aún mayores, en Samuel 1-13, «Saúl escogió a tres mil de Israel» para luchar contra los filisteos, que a su vez «lograron reunir a treinta mil carros para luchar

contra Israel». Finalmente, en Samuel 2-6, «David reunió de nuevo a todos los hombres escogidos de Israel, treinta mil», para luchar contra los filisteos.

Para los pitagóricos, el número 4 era el número de la justicia y el orden. En la superficie de la Tierra los cuatro vientos o direcciones bastaban a los humanos para orientarse e identificar las coordenadas en el espacio. Geométricamente, cuatro puntos que no están en el mismo plano pueden formar un tetraedro (una pirámide con cuatro caras triangulares), con un volumen en tres dimensiones. Los pitagóricos también consideraban que el número 4 tenía un estatus especial por otro motivo: su actitud hacia el número 10 o el sagrado *tetractys*. El 10 era el número más reverenciado porque representaba el universo en su conjunto. El hecho de que 1 + 2 + 3 + 4 = 10 generó una relación muy cercana entre el 10 y el 4. A su vez, esta relación indicaba que 10 no sólo unía los números que representaban todas las dimensiones, sino que además combinaba todas sus propiedades, a saber, lo único (expresado por el 1), la polaridad (expresada por el 2), la armonía (expresada por el 3) y el espacio y la materia (expresadas por el 4). Por tanto, el diez era el número de *todas las cosas*, con las propiedades que el pitagórico Filolao expresó tan acertadamente hacia el 400 a.C.: «sublime, poderoso, creador de todo, el principio y la guía de lo divino por lo que se refiere a la vida sobre la Tierra».

El número 6 era el primer número *perfecto*, así como el número de la creación. El adjetivo «perfecto» se otorgaba a los números que eran precisamente iguales a la suma de todos los números menores por los que se podía dividir, como, por ejemplo, 6 = 1 + 2 + 3. Por cierto, el siguiente número que cumple estas mismas condiciones es el 28 = 1 +

2 + 4 + 7 + 14, seguido del 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + + 16 + 31 + 62 + 124 + 248; el noveno número perfecto contiene ya treinta y siete dígitos. Cinco es también el resultado del primer número femenino, 2, y el primer número masculino, 3. El filósofo helenístico judío Filo Judás de Alejandría (circa 20 a.C.-circa 40 d.C.), cuya obra enlazaba la filosofía griega con las escrituras hebreas, sugirió que Dios creó el mundo en seis días porque seis era un número perfecto. San Agustín (354-430) coincidió con éste en su obra *La ciudad de Dios*:«Seis es en sí mismo un número perfecto, y no porque Dios creara el mundo en seis días; más bien al contrario: Dios creó el mundo en seis días porque ese número era perfecto, y lo seguiría siendo aunque la obra en seis días no existiera». Algunos comentaristas de la Biblia también consideraron al 28 como un número básico del Arquitecto supremo, señalando los 28 días del ciclo lunar. La fascinación por los números perfectos penetró incluso en el judaísmo. El rabino Yosef ben Yehudah Aknin realizó un estudio en defensa de ellos en el libro del siglo XII, *La sanación de las almas*.

Al ejemplificar la actitud de los pitagóricos hacia los números, he dejado el número 5 para el final a propósito, ya que este número nos lleva a los orígenes de la Proporción Áurea. El cinco representaba la unión del primer número femenino, 2, con el primer número masculino, 3, y es el número del amor y el matrimonio. Parece ser que los pitagóricos utilizaban el pentagrama (la estrella de cinco puntas, figura 3) como símbolo de su hermandad, y la denominaban «Salud». Luciano, el escritor y retórico griego del siglo II, escribe lo siguiente (en *En defensa del deslizamiento de la lengua al saludar*):

> De todos modos, toda la escuela (pitagórica) encabezaba las cartas serias que se enviaban con un «Salud para ti», un saludo de lo más adecuado tanto para el cuerpo como para el alma, comprendiendo todo lo humano. Ciertamente, llaman «Salud» al Pentagrama, el triángulo de triple intersección que utilizan como símbolo de su secta.

En 1934, A. de la Fuÿe, en su obra *Le Pentagramme Pythagoricien, Sa Diffusion, Son Emploi dans le Syllabaire Cuneiform* (El pentagrama pitagórico, su difusión y su uso en el silabario cuneiforme) ofreció una explicación imaginativa (aunque quizás no del todo acertada) para la relación entre el pentagrama y la salud. De la Fuÿe propuso que el pentagrama simbolizaba a Higeia, la diosa griega de la salud, a través de una correspondencia entre las cinco puntas de la estrella y un dibujo simple de la diosa (figura 9).

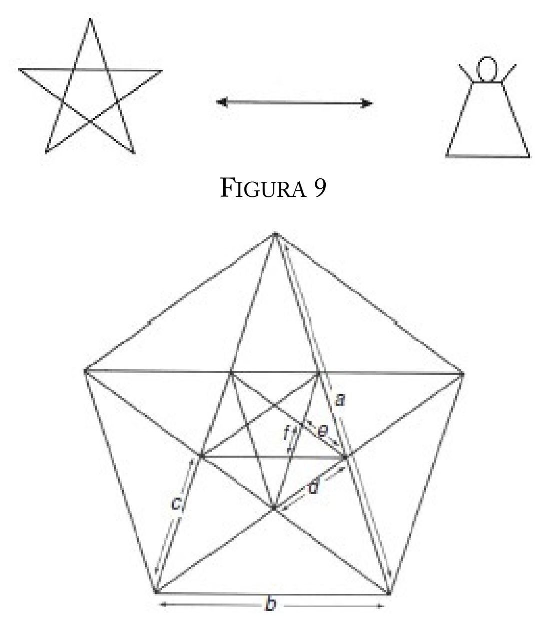


FIGURA 9

FIGURA 10

El pentágono regular está muy relacionado con el pentagrama (la figura plana posee cinco lados y cinco ángulos idénticos, como se observa en la figura 10). Al conectar con diagonales todos los vértices del pentágono se obtiene un pentagrama. A su vez, las diagonales forman en

el centro un pentágono de menor tamaño, y las diagonales de este pentágono forman un pentagrama y un pentágono aún menor. Esta progresión puede continuar hasta el infinito, creando pentagramas y pentágonos cada vez más pequeños. La sorprendente característica de estas figuras es que si se mira a los segmentos en línea en orden de longitud decreciente (señalados en la figura como *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*), se puede comprobar con facilidad, utilizando geometría elemental, que *todo segmento es menor que el anterior por un factor precisamente igual a la Proporción Áurea,* Φ . Es decir, la proporción de las longitudes de *a* a *b* es phi; la proporción de *b* a *c* es phi, y así sucesivamente. Y lo que es aún más importante, podemos basarnos en el hecho de que el proceso de creación de una serie de pentágonos y pentagramas, unos incluidos dentro de otros, puede continuar indefinidamente hasta tamaños cada vez más pequeños para demostrar que tanto la diagonal como el lado del pentagrama son inconmensurables, es decir, que la proporción de sus longitudes (equivalentes a phi) no puede expresarse como la proporción de dos números enteros. Esto significa que la diagonal y el lado del pentágono no pueden tener una medida común, de tal modo que la diagonal es un múltiplo entero de esa medida y el lado es también un múltiplo entero de la misma medida. (Para aquellos lectores con una tendencia más matemática, en el apéndice 2 se demuestra esta prueba). Recordemos que aquellos números que no pueden expresarse como proporciones de dos números enteros (es decir, como fracciones o números racionales) se conocen como números irracionales. Por tanto, esta prueba demuestra que phi es un número irracional.

Varios investigadores (incluido Kurt von Fritz en su artículo titulado «The Discovery of Incommesurability by Hippasus of Metapontum», publicado en 1945) propone

que los pitagóricos fueron los primeros en descubrir la Proporción Áurea y la inconmensurabilidad. Estos historiadores de las matemáticas creían que la preocupación pitagórica por el pentagrama y el pentágono, junto al conocimiento sobre geometría a mediados del siglo V a.C., posibilitó que los pitagóricos, y en particular Hipaso de Metaponto, descubrieran la Proporción Áurea y, mediante ésta, la inconmensurabilidad. Parece que estos argumentos recibieron, por lo menos parcialmente, el apoyo de los escritos de Jámblico (circa 245-325 d.C.), fundador de la escuela neoplatónica en Siria. Según la versión de Jámblico, los pitagóricos erigieron una lápida a Hipaso como consecuencia de su devastador descubrimiento de la inconmensurabilidad como si éste ya estuviera muerto. Jámblico también afirmó:

> Se dice que Hipaso era un pitagórico, y que, por haber sido el primero en publicar y describir la esfera desde los doce pentágonos, murió en el mar a causa de su impiedad, pero que se le otorgó el mérito de su descubrimiento, a pesar de que en realidad le pertenecía a ÉL (ya que de este modo se refieren a Pitágoras y no llamándole por su nombre).

En la frase «describir la esfera desde los doce pentágonos», Jámblico se refiere (aunque de un modo bastante impreciso, ya que dicha figura no es propiamente un esfera) a la construcción del dodecaedro, un sólido de doce caras, cada una de las cuales es un pentágono, que es precisamente uno de los cinco sólidos conocidos como sólidos platónicos. Los sólidos platónicos, a los que nos referiremos en el capítulo 4, están íntimamente relacionados con la Proporción Áurea. A pesar del tono más bien mítico de estas versiones, el historiado matemático Walter Burkert, en su libro publicado en 1972, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, concluye que «la tradición de Hipaso, a pesar de estar envuelta de leyenda, tiene sentido». La principal razón que explica una afirmación tal puede

observarse en la figura 10 (y en el apéndice 2). La conclusión de que la diagonal y el lado de un pentágono regular son inconmensurables se basa en la simple observación de que la construcción de pentágonos cada vez más pequeños puede continuar indefinidamente. Por tanto, es probable que los matemáticos del siglo V a.C. hubieran tenido acceso a esta prueba.

PARA EL SER RACIONAL, SÓLO LO IRRACIONAL ES INSOPORTABLE

Aunque realmente sea posible (y quizás hasta probable) que la inconmensurabilidad y los números irracionales fueran descubiertos por primera vez por la vía de la Proporción Áurea, la versión más tradicional cree que tales conceptos se descubrieron a través de la proporción de la diagonal y el lado del cuadrado. Aristóteles, en su *Analítica Primera*, escribe: «la diagonal (de un cuadrado) es inconmensurable (con el lado) porque los números impares son iguales aunque se crean conmensurables». Aristóteles hace referencia a una prueba de inconmensurabilidad que presentaré a continuación con todo detalle, dado que es un bello ejemplo de una prueba por el método lógico conocido como *reductio ad absurdum* (reducción al absurdo). De hecho, cuando en 1988 la publicación *The Mathematical Intelligencer* invitó a sus lectores a clasificar una selección de veinticuatro teoremas según su «belleza», la prueba que presento a continuación quedó en séptimo lugar.

La idea tras el ingenioso método del *reductio ad absurdum* es la de demostrar una propuesta simplemente probando la falsedad de su contraria. Maimónides (Moisés Ben Maimón, 1135-1204), el pensador judío más influyente de la Edad Media, utilizó este método para probar la existencia de un creador. En su monumental obra *Mishne*

Torah (La Torá revisada), que pretendía reunir toda la materia religiosa, Maimónides escribió: «El principio básico es la existencia de un Primer Ser que creó todo lo que existe, ya que si suponemos que aquél no existe, entonces nada podría existir». En matemáticas, *reductio ad absurdum* se utiliza del siguiente modo: se empieza creyendo que el teorema que quieres demostrar que es cierto es, de hecho, falso; a continuación, mediante una serie de pasos lógicos, se deriva hacia algo que representa una clara *contradicción*, como, por ejemplo, 1 = 0; entonces se concluye que el teorema originario no podía ser falso, por lo que necesariamente tiene que ser cierto. Nótese que para que este método funcione, debe asumirse que un teorema o tesis tiene que ser *o bien verdadero o bien falso*: o bien ahora mismo está leyendo esta página o bien no.

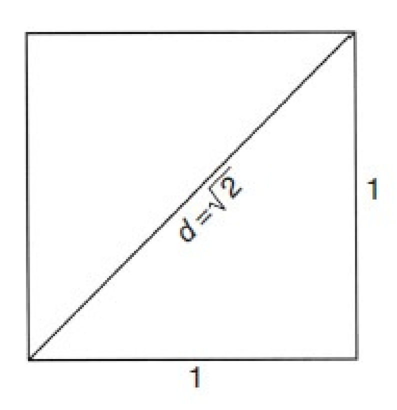


FIGURA 11

Examine primero el cuadrado de la figura 11 en el que la longitud del lado es una unidad. Si queremos saber la longitud de la diagonal, podemos utilizar el teorema de Pitágoras con cualquiera de los triángulos rectángulos en los que se divide el cuadrado. Recuerde que el teorema afirma que el cuadrado de la hipotenusa (la diagonal) es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos del triángulo. Si denominamos *d* a la longitud de la hipotenusa,

obtenemos que: $d^2 = 1^2 + 1^2$ o $d^2 = 1 + 1 = 2$. Si conocemos el cuadrado de un número, podemos saber el número a través de la raíz cuadrada. Por ejemplo, si sabemos que x al cuadrado es igual a 25, entonces $x = 5 = \sqrt{25}$. Si $d^2 = 2$, entonces $d = \sqrt{2}$. La proporción de la diagonal respecto al lado de un cuadrado es, por tanto, la raíz cuadrada de 2. (Con una calculadora de bolsillo descubrirá que el valor de este último es igual a 1,41421356…). Lo que ahora queremos demostrar es que $\sqrt{2}$ *no* puede expresarse como la proporción de dos números enteros (y que, por tanto, es un número irracional). Consideren lo siguiente un momento: lo que estamos a punto de demostrarles es que, aunque tenemos una cantidad infinita de números enteros a nuestra disposición, no importa cuánto tiempo invirtamos en buscarlos, jamás encontraremos dos cuya proporción sea precisamente igual a $\sqrt{2}$. ¿No es alucinante?

La demostración (por el procedimiento *reductio ad absurdum*) es la siguiente: empecemos suponiendo lo opuesto a lo que en realidad queremos probar, es decir, supongamos que $\sqrt{2}$ sea en realidad igual a la proporción de dos números enteros a y b, $\sqrt{2} = a/b$. Si resulta que a y b tienen algunos factores comunes (como los números 9 y 6 tienen el 3 como factor común), entonces simplificaríamos la fracción dividiendo ambos números por esos factores hasta que nos queden dos números, p y q, que no tengan factores comunes. (En el ejemplo anterior, $^9/_6$ sería $^3/_2$.) Evidentemente, p y q no pueden ser los dos pares (si lo fueran, tendrían como factor común el número 2). Por lo tanto, nuestra suposición es que $p/q = \sqrt{2}$, donde p y q son números enteros sin factores comunes. Podemos tomar el cuadrado de ambos lados para obtener: $p^2/q^2 = 2$. Ahora multiplicaremos ambos lados por q^2 para obtener: $p^2 = 2q^2$. Nótese que la parte derecha de esta ecuación es

evidentemente un número par, ya que es un número (q^2) multiplicado por 2, que siempre da un número par. Como p^2 es igual a este número par, p^2 es un número par. Pero si el cuadrado de un número es par, entonces ese mismo número tiene que ser par. (El cuadrado es sencillamente el número multiplicado por sí mismo, y si el número fuera impar, al multiplicarse por sí mismo, también obtendríamos un número impar). Por tanto descubrimos que p debe ser un número par. Recordemos que esto significa que q debe ser impar, porque p y q no tienen factores comunes. Sin embargo, si p es par, entonces podemos escribir p como $p = 2r$ (ya que cualquier número par tiene 2 como factor). Por tanto, la ecuación anterior $p^2 = 2q^2$ puede escribirse (simplemente sustituyendo $2r$ por p): $(2r)^2 = 2q^2$, que es $4r^2 = 2q^2$ [ya que $(2r)^2 = (2r) \times (2r)$]. Al dividir ambos lados por 2 nos da: $2r^2 = q^2$. Utilizando los mismos argumentos que antes, esto nos indica que q^2 es par (ya que es igual a 2 veces otro número) y, por tanto, que *q tiene que ser par*. Sin embargo, ¡fíjense en que antes hemos demostrado que q tenía que ser impar! Así, hemos llegado a algo que es una clara contradicción lógica, ya que mostramos que q tiene que ser par e impar a la vez. Este hecho demuestra que nuestra suposición inicial, es decir, la existencia de dos números enteros, p y q, cuya proporción es igual a $\sqrt{2}$, es falsa, y así terminamos la prueba. Los números como $\sqrt{2}$ representan un nuevo tipo de número: los números *irracionales*.

De un modo muy similar podemos demostrar que la raíz cuadrada de cualquier número que no sea un cuadrado perfecto (como 9 o 16) es un número irracional. Números como $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$ son números irracionales.

No podemos sobredimensionar la magnitud del descubrimiento de la inconmensurabilidad y de los números irracionales. Antes de este descubrimiento, los matemáticos habían supuesto que si se tienen dos segmentos lineales, uno mayor que el otro, siempre se puede hallar una unidad de medida menor para que las longitudes de ambos segmentos sean múltiplos de números enteros de esta unidad menor. Por ejemplo, si un segmento mide exactamente 21, 37 milímetros de longitud y el otro 11, 475, podemos medirlos en unidades de una milésima de milímetro, siendo el primero 21.370 de dichas unidades y el segundo 11.475 unidades. Por tanto, los primeros especialistas creyeron que para encontrar una medida común menor simplemente debían investigar pacientemente. El descubrimiento de la inconmensurabilidad significa que al cortar dos segmentos de una línea en Proporción Áurea (como *AC* y *CB* en la figura 2), o por la diagonal y un lado de un cuadrado, o por la diagonal y un lado del pentágono, jamás se encuentra una medida común. Steven Cushing publicó en 1988 un poema (en *Mathematics Magazine*) que describe nuestra reacción natural ante los irracionales:

Pitágoras

Nos asombró

Y abrumó nuestra razón

Con el número irracional.

Apreciaremos mejor el salto intelectual necesario para descubrir los números irracionales si comprendemos que incluso las fracciones o *números racionales* como $^1/_2$, $^3/_5$, $^{11}/_{13}$, representan por sí mismos un descubrimiento (o invención) humano extremadamente importante. Leopold Kronecker

(1823-1891), matemático del siglo XIX, expresó su opinión sobre el tema de este modo: «Dios creó los números naturales, todo lo demás es obra del hombre».

Por ejemplo, gran parte de nuestro conocimiento sobre la familiaridad de los antiguos egipcios con las fracciones proviene del Papiro Rhind (o Ahmes). Se trata de un enorme papiro (de unos 549 cm de largo y unos 305 cm de alto) que fue copiado a partir de documentos anteriores alrededor del 1650 a.C. por un escriba llamado Ahmes. El papiro fue hallado en Tebas y comprado, en 1858, por el anticuario escocés Henry Rhind; actualmente se encuentra en el Museo Británico (a excepción de unos cuantos fragmentos que aparecieron por sorpresa entre una colección de escritos médicos que actualmente se encuentran en el Museo de Brooklyn). El Papiro Rhind, de hecho un manual de cálculo, tiene nombres simples sólo para las fracciones de unidad, como $^1/_2$, $^1/_3$, $1/_4$, etc., y para $^2/_3$.Otros papiros también tienen un nombre para $3/_4$.Los antiguos egipcios crearon otras fracciones simplemente al sumar unas cuantas fracciones de unidad. Por ejemplo, tenían $^1/_2 + ^1/_5 + ^1/_{10}$ para representar $^4/_5$; y$^1/_{24} + ^1/_{58} + ^1/_{174} + ^1/_{232}$ para representar $^2/_{29}$. Para medir las fracciones de una capacidad de grano llamada hekat, los antiguos egipcios utilizaban lo que se conocía como fracciones «ojo de Horus». Según cuenta la leyenda, en una lucha entre el dios Horus, hijo de Osiris e Isis, y el asesino de su padre, el ojo de Horus fue arrancado y se rompió en pedazos. Más tarde, el dios de la escritura y el cálculo, Thoth, encontró los trozos y pretendió reconstruirlo. Sin embargo, tan sólo encontró las piezas que correspondían a las fracciones $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$ y $^1/_{64}$. Al darse cuenta de que estas fracciones sumaban sólo $^{63}/_{64}$, Thoth creó la fracción que faltaba, $^1/_{64}$, mediante la magia, lo que le permitió completar el ojo.

Curiosamente, el sistema egipcio de fracciones de unidad siguió utilizándose en Europa durante siglos. Para aquellos que durante el Renacimiento tuvieron para memorizar cómo sumar o restar fracciones, algunos escritores de libros de texto de matemáticas inventaron reglas escritas en verso. Thomas Hylles, en el libro *The Art of Vulgar Arithmetic, both in Integers and Fractions* (publicado en 1600), nos ofrece un ejemplo divertido:

La suma de fracciones y la resta también

Requiere primero la misma base para todos

Que con la reducción alcanza la perfección

Y una vez hecha en todos los casos,

Suma o resta entonces sólo lo de arriba

Rescribiendo la base ahora común.

A pesar de, y quizás (hasta cierto punto) debido a, el secretismo que rodea a Pitágoras y la hermandad pitagórica, se les atribuye provisionalmente algunos descubrimientos remarcables entre los que se podría incluir la Proporción Áurea y la inconmensurabilidad. Sin embargo, debido al enorme prestigio y éxito de las matemáticas egipcias y de la antigua Babilonia, y al hecho de que el propio Pitágoras probablemente aprendiera parte de sus conocimientos matemáticos en Egipto y Babilonia, debemos preguntarnos: ¿es posible que estas civilizaciones u otras descubrieran la Proporción Áurea incluso antes que los pitagóricos? Esta pregunta se torna particularmente intrigante cuando nos percatamos de que la literatura está repleta de afirmaciones según las cuales podemos encontrar la Proporción Áurea en las dimensiones de la Gran Pirámide de Khufu en Giza. Para responder a esta pregunta, deberemos emprender una expedición para explorar la arqueología matemática.

3

¿BAJO UNA PIRÁMIDE CON PUNTA DE ESTRELLA EN Y?[1]

Las pirámides primero, que en Egipto se erigieron;
Después los Jardines de Babilonia, para Amitis hechos;
Entonces la Tumba, de afecto y culpa, de Mausoleo;
Cuarto, el Templo de Diana en Éfeso construido;
El Coloso de Rodas, forjado en bronce hacia el Sol;
Sexto, la Estatua de Júpiter por Fidias hecha;
El Faro de Egipto, el último, nos dicen,
O el Palacio de Ciro, de oro cementado.

ANÓNIMO

Las siete maravillas del mundo antiguo

El título que da nombre a este capítulo proviene del poema *Sobre Shakespeare*, escrito en 1630 por el famoso poeta inglés John Milton (1608-1674). Milton, considerado por muchos como el segundo mejor poeta inglés tras Shakespeare, escribió:

¿Para qué necesita, mi Shakespeare, para sus venerados huesos,
la labor de una era en amontonadas piedras,
o que sus consagradas reliquias deban ser ocultadas
debajo de una pirámide que apunta a las estrellas?
Querido hijo de la memoria, gran heredero de la fama,
¿para qué necesitas tú tan débil testimonio de tu nombre?

Como veremos dentro de poco, no hay duda de que el alineamiento de las pirámides estaba basado en las estrellas. Aunque estos monumentos ya causan por sí mismos la suficiente admiración e inspiración, algunos autores insisten en que las dimensiones de la Gran Pirámide están basadas en la Proporción Áurea. Para todos los entusiastas de la

Proporción Áurea, dicha relación añade algo más de misticismo al ya de por sí místico ambiente que rodea a esta proporción. Pero ¿es cierto? ¿De verdad sabían los antiguos egipcios algo de Φ? Y si lo conocían, ¿es cierto que decidieron «inmortalizar» la Proporción Áurea incorporándola a una de las Siete Maravillas de la Antigüedad?

Sabiendo que, probablemente, el interés inicial en la Proporción Áurea surgió de la relación que establecía con el pentagrama, ante todo debemos reseguir los orígenes de este último, ya que eso nos conducirá a las primeras apariciones de la Proporción Áurea.

Si le pides a un niño que te dibuje una estrella, lo más probable es que dibuje un pentagrama. En realidad, es una consecuencia del hecho de observar las estrellas a través de la atmósfera terrestre. La turbulencia del aire desvía la luz de las estrellas creando modelos en constante transformación, lo que provoca el familiar centelleo. Al intentar representar las puntas que genera el centelleo utilizando una figura geométrica simple, los humanos dieron con el pentagrama, el cual también dispone de otra atractiva propiedad adicional: puede dibujarse sin levantar el instrumento utilizado de la arcilla, del papiro o del papel.

Con el paso del tiempo, estas «estrellas» se han convertido en un símbolo de excelencia (por ejemplo, hoteles, películas, libros de cinco estrellas), de éxito (estrellato), de oportunidades (alcanzar las estrellas) y de autoridad (generales «cinco estrellas»). Si combinamos este tipo de simbolismo con el encanto romántico de una noche estrellada, no debería sorprendernos que en las banderas de

más de sesenta naciones aparezcan estrellas de cinco puntas, ni encontrar tales modelos de estrella en innumerables logos comerciales (Texaco, Chrysler, etc.).

Algunos de los pentagramas más antiguos aparecieron en Mesopotamia durante el cuarto milenio a.C. En excavaciones realizadas en Uruk (donde también se descubrieron las primeras representaciones escritas) y en Jemdet Nasr se han encontrado formas de pentagramas. Probablemente, la antigua ciudad sumeria de Uruk es la misma que se menciona en la Biblia (Génesis 10) con el nombre de Erech, una de las ciudades del reino del poderoso cazador Nimrod. El pentagrama se encontró en una tablilla de arcilla que data, aproximadamente, del 3200 a.C. En Jemdet Nasr, se han encontrado pentagramas de época similar en una vasija y en un huso en espiral. En sumerio, el pentagrama o su derivado cuneiforme, significaba «las regiones del universo». Otros lugares del Oriente Medio antiguo también produjeron pentagramas. Se encontró uno en un raspador de pedernal del período calcolítico (4500-3100 a.C.) en Tel Eshdar, en el desierto israelí del Negev. También se han hallado pentagramas en Israel, en las excavaciones de Gezer y Tel Zachariah, pero en estos casos la datación es de un período considerablemente posterior (el siglo v a.C.). A pesar de que las estrellas de cinco puntas aparecen con mucha frecuencia en artefactos del antiguo Egipto, no son muy habituales los pentagramas auténticamente geométricos, aunque, en Naqadah, cerca de Tebas, se encontró uno en un vaso que databa del 3100 a.C. Generalmente, el símbolo jeroglífico compuesto por una estrella encerrada en un círculo significa el «mundo subterráneo» o la lucha mítica de las estrellas durante el crepúsculo, mientras que las estrellas sin círculo servían simplemente para designar las noches estrelladas.

Por tanto, la pregunta que debemos responder en el contexto de este libro no es tanto si los pentagramas o pentágonos tenían un significado simbólico o místico para estas civilizaciones antiguas sino si estas civilizaciones también eran conscientes de las propiedades *geométricas* de dichas figuras y, en especial, de la Proporción Áurea.

CUANDO BABILONIA ERA POLVO

Los estudios realizados en tablillas cuneiformes del segundo milenio a.C. descubiertas en 1936 en Susa (Irán), demuestran que los babilonios de la primera dinastía conocían, al menos de forma aproximada, la fórmula del área de un pentágono. El interés babilónico por el pentágono pudo haberse originado por el simple hecho de que ésta es la figura que se obtiene si se presionan los extremos de los cinco dedos contra una tablilla de arcilla. En una línea de la tablilla de Susa se puede leer lo siguiente: «1 40, la constante de la figura de cinco lados». Dado que los babilonios utilizaban el sistema sexagesimal (cuya base es 60), los números 1 40 deben interpretarse como 1 + 40/60, o 1,666…, para el área del pentágono. De hecho, el área real de un pentágono con un lado de longitud unidad tiene un valor muy similar: 1,720. Los babilonios tenían una aproximación similar para pi, la proporción de la circunferencia de un círculo respecto a su diámetro. En realidad, tanto las aproximaciones de pi como las del área del pentágono se basan en la misma relación. Los babilonios suponían que el perímetro de cualquier polígono regular (figura de muchos lados y ángulos iguales) era igual a seis veces el radio del círculo que circunscribía dicho polígono (figura 12). Ciertamente, esta relación es precisa para los hexágonos regulares (figura de seis lados, figura 12), ya que todos los triángulos tienen lados iguales. El valor de π

deducido por los babilonios era $\pi = 3\ ^1/_8 = 3{,}125$. No es una mala aproximación si tenemos en cuenta que el valor exacto es 3,14159… Por lo que se refiere al pentágono, la suposición «perímetro igual a seis veces el radio» (que no es precisa) da un valor aproximado de 1,666… para el área que aparece en la tablilla de Susa.

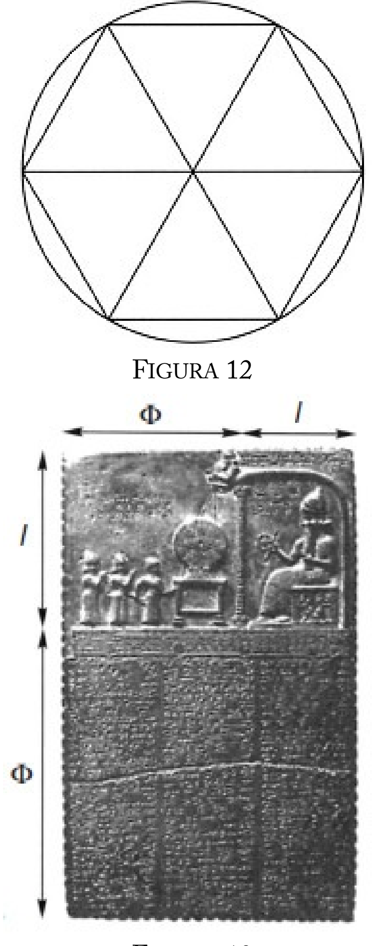


FIGURA 12

FIGURA 13

A pesar de estos tempranos descubrimientos en matemáticas y de la íntima relación entre el sistema pentágono-pentagrama y la Proporción Áurea, no existe ninguna evidencia matemática que demuestre que los

babilonios conocían la Proporción Áurea. No obstante, algunos textos afirman que la Proporción Áurea se encuentra en estelas y bajorrelieves babilonios y asirios. Por ejemplo, se afirma (en una obra muy entretenida de Michael Schneider titulada *A Beginner's Guide to Constructing the Universe*) que la estela babilonia (figura 13), donde se representa a sacerdotes acompañando a un iniciado a una «reunión» con el dios sol, contiene «muchas relaciones de la Proporción Áurea». De modo similar, en un artículo de 1976 aparecido en la revista *The Fibonacci Quarterly*, la crítica de arte Helene Hedian señala que un bajorrelieve del siglo IX a.C., donde se representa a un semidiós alado asirio (actualmente en el Metropolitan Museum of Art), encaja a la perfección en un rectángulo cuyas dimensiones están en Proporción Áurea. Hedian aún va más lejos al afirmar que las marcadas líneas de las alas, patas y pico siguen otras divisiones de phi. Hedian realiza una afirmación similar respecto a la «Leona herida» babilonia de Nínive, del 600 a.C. aproximadamente, que en la actualidad se exhibe en el Museo Británico.

¿Es cierto que la Proporción Áurea aparece en los mencionados artefactos mesopotámicos o se trata simplemente de una apreciación errónea?

Para responder a esta pregunta, antes debemos ser capaces de identificar ciertos criterios que nos permitirán determinar la verosimilitud de algunas afirmaciones sobre la apariencia de la Proporción Áurea. Es evidente que la presencia de la Proporción Áurea puede establecerse sin ninguna ambigüedad en el caso de encontrar documentación que indique que el artista o arquitecto ha hecho uso de ella

conscientemente. Por desgracia, no existe documentación de estas características para las tablillas y bajorrelieves babilonios.

Evidentemente, un devoto numerólogo áureo podría argüir que la ausencia de evidencias no es evidencia de ausencia y que las dimensiones calculadas por ellos son prueba suficiente de la utilización de la Proporción Áurea. Sin embargo, como veremos dentro de poco, el juego consistente en tratar de encontrar la Proporción Áurea en las dimensiones de los objetos puede llevarnos a engaño. Déjenme ilustrar la afirmación anterior a través de un ejemplo sencillo. La figura 14 muestra el esquema de un pequeño aparato de televisión situado en el banco de mi cocina. El dibujo representa algunas dimensiones que he medido yo mismo. Descubrirán que tanto la proporción de la altura del saliente en la parte posterior del televisor respecto a su anchura, 10, 6/6,5 = 1,63, como la proporción de la longitud de la parte frontal respecto a la altura de la pantalla, 14/8,75 = 1,6, están ambas razonablemente cerca del valor de la Proporción Áurea, 1,618… ¿Significa esto que los fabricantes del televisor decidieron incluir la Proporción Áurea en su arquitectura? Evidentemente, no. Este ejemplo pone en evidencia de forma sencilla los dos defectos principales de las afirmaciones sobre la presencia de la Proporción Áurea en la arquitectura o en las obras de arte basadas únicamente en las dimensiones: 1) implican manipulación de las cifras y 2) pasan por alto errores en el cálculo de dimensiones.

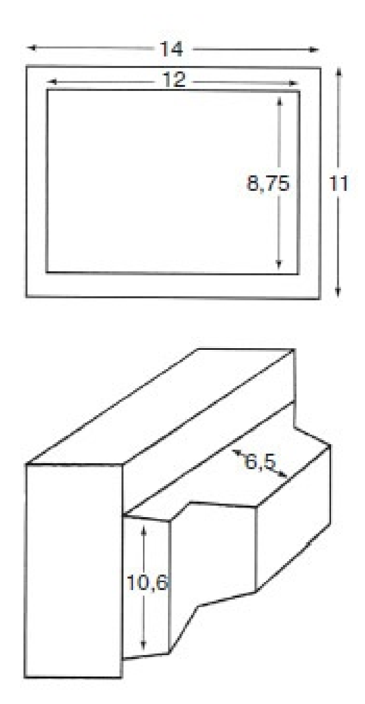


FIGURA 14

Cada vez que se miden las dimensiones de una estructura relativamente compleja (un dibujo en una estela o un aparato de televisión, por ejemplo), se puede elegir entre una amplia gama de longitudes. Siempre y cuando se ignoren partes del objeto en cuestión, si se dispone de la paciencia para modificar y manipular los números de diferentes modos, es probable que se consigan algunas cifras interesantes. Consecuentemente, en el caso de la televisión, pude «descubrir» algunas dimensiones que dan proporciones muy cercanas a la Proporción Áurea.

La segunda cuestión que olvidan a menudo los vehementes aficionados de la Proporción Áurea es que cualquier medición de longitudes implica errores e inexactitudes. Es importante comprender que cualquier error en la medición de longitudes comporta un error aún mayor en la proporción calculada. Por ejemplo, imaginen

que medimos dos longitudes de 10 cm cada una con una precisión del 1 por ciento. Esto significa que el resultado de la medición de cada una de las longitudes puede situarse entre los 9,9 y los 10,1 cm. La proporción de tales longitudes puede desviarse hasta el 9,9/10,1 = 0,98, lo que representa un error del 2 por ciento, el doble de las mediciones individuales. Por tanto, un numerólogo áureo ferviente puede modificar dos mediciones con sólo un 1 por ciento, lo que afectará a la proporción obtenida en el 2 por ciento.

Si volvemos a examinar la figura 13 desde esta perspectiva, nos daremos cuenta de que, por ejemplo, el segmento vertical más largo ha sido elegido convenientemente para poder incluir la base del bajorrelieve y no únicamente el texto cuneiforme. De forma similar, el punto donde se ha medido el largo segmento horizontal se ha elegido arbitrariamente para que quede a la derecha, en lugar de a la izquierda, del borde del bajorrelieve.

Tras examinar todo el material existente desde este punto de vista, debo concluir que es altamente improbable que los babilonios descubrieran la Proporción Áurea.

DESCENDIENDO POR TIERRA DE EGIPTO

La situación de los antiguos egipcios es mucho más complicada y requiere una cantidad considerable de trabajo detectivesco. En este caso nos enfrentamos a lo que se han considerado abrumadoras evidencias en forma de numerosos textos que afirman la existencia de phi, por ejemplo, en las proporciones de la Gran Pirámide, así como en otros monumentos del antiguo Egipto.

Empezaremos con dos de los casos más sencillos, el de Osirion y el de la Tumba de Petosiris. El templo Osirion se considera el cenotafio del rey Seti I, quien gobernó Egipto

en la dinastía XIX desde aproximadamente el 1300 a.C. hasta el 1290 a.C. El templo fue descubierto por el eminente arqueólogo Sir Flinders Petrie en 1901, y las enormes excavaciones finalizaron en 1927. Se cree que el propio templo representa, a través de su simbolismo arquitectónico, el mito de Osiris, marido de Isis y rey de Egipto. Su hermano Seth le asesinó y dispersó las partes de su cuerpo. Isis las volvió a reunir, lo que permitió que Osiris renaciera. Por tanto, Osiris se transformó en el rey del Mundo Subterráneo y de la transformación cíclica a través de la muerte y el renacimiento, tanto desde una perspectiva individual como cósmica. Con posterioridad al establecimiento del culto a la muerte durante el Reino Medio (2000-1786), a Osiris se le consideró el juez del alma tras la muerte.

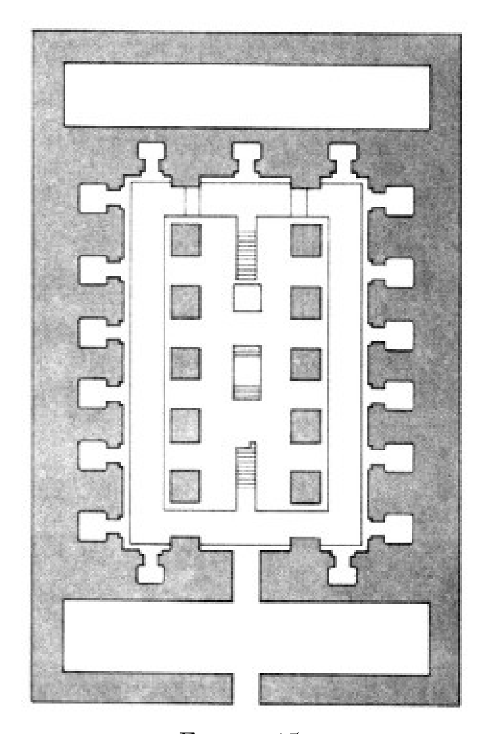


FIGURA 15a

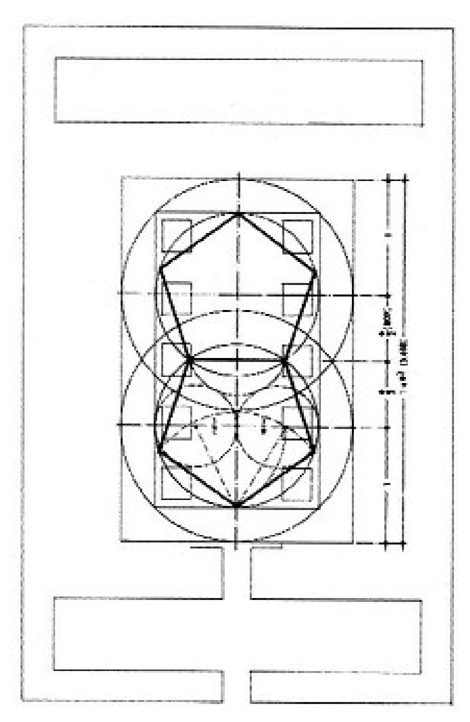


FIGURA 15b

El templo completamente techado de Osirion se cubrió de tierra para darle la apariencia de una tumba subterránea. El plano del Osirion (figura 15a) está compuesto por un área central con diez columnas cuadradas, y rodeada, probablemente, por un dique cubierto de agua. Algunas interpretaciones consideran que esta estructura simboliza la creación a partir de las aguas primigenias.

Robert Lawlor, en su interesante obra de 1982, *Sacred Geometry: Philosophy and Practice*, sugiere que la geometría de Osirion se «ajusta a las proporciones de la Sección Áurea» porque «la Proporción Áurea es la idea-forma trascendente que debe existir *a priori* y eternamente antes de todas las progresiones que evolucionan en el tiempo y en el espacio». Para apoyar su afirmación de la presencia prominente de la Proporción Áurea (Φ) en el diseño arquitectónico del templo, Lawlor proporciona detallados análisis geométricos

similares a los de la figura 15b. Además, Lawlor afirma que «el énfasis por el tema del pentágono simbolizaba adecuadamente la creencia de que el rey se convertía, tras la muerte, en una estrella».

A pesar del considerable atractivo visual, creo que los análisis de Lawlor son poco convincentes. No únicamente las líneas que en principio deben indicar la Proporción Áurea están trazadas sobre lo que parecen puntos totalmente arbitrarios, sino que incluso los pentágonos representan, según mi opinión, una interpretación algo forzada de lo que básicamente es una figura rectangular. El hecho de que el propio Lawlor ofrezca otros análisis geométricos de la geometría del templo (asociando a Φ con diversas dimensiones) demuestra sobradamente la naturaleza caprichosa, aunque no aislada, de tales lecturas.

Muy similar es la situación de la Tumba de Petosiris, excavada por el arqueólogo Gustave Lefebvre a principios de los años 20. La tumba, de alrededor del 300 a.C., no es tan antigua como el Osirion, y fue construida para el Sumo Sacerdote (conocido como Maestro del Trono) de Thoth. Dado que la tumba es de un periodo en el que la Proporción Áurea ya era conocida (para los griegos), al menos en principio, la Proporción Áurea pudo incorporarse a la geometría de la tumba. En realidad, Lawlor (de nuevo en *Sacred Geometry*) concluye que «el Maestro Petosiris disponía de un conocimiento absoluto y extremadamente complejo de la Proporción Áurea». Esta conclusión se basa en dos análisis geométricos de un bajorrelieve pintado hallado en el muro oriental de la capilla de la tumba (figura 16a). En el bajorrelieve aparece un sacerdote vertiendo una libación sobre la cabeza del momificado difunto.

Por desgracia, los análisis geométricos que presenta Lawlor parecen bastante artificiosos (figura 16b), con líneas trazadas convenientemente sobre puntos que de ninguna manera son terminales obvios. Además, algunas proporciones obtenidas son demasiado enrevesadas ($2\sqrt{1 + \phi^2} / \phi^2$) para ser creíbles. Por tanto, mi opinión es que, aunque la afirmación de Lawlor según la cual «las prácticas de enterramiento en la tradición faraónica se realizaban no únicamente para proporcionar un receptáculo para el cuerpo físico del difunto, sino también para construir un lugar donde retener el conocimiento metafísico que la persona ha logrado dominar durante su vida» es correcta, es muy improbable que la Proporción Áurea formara parte de los conocimientos de Petosiris.

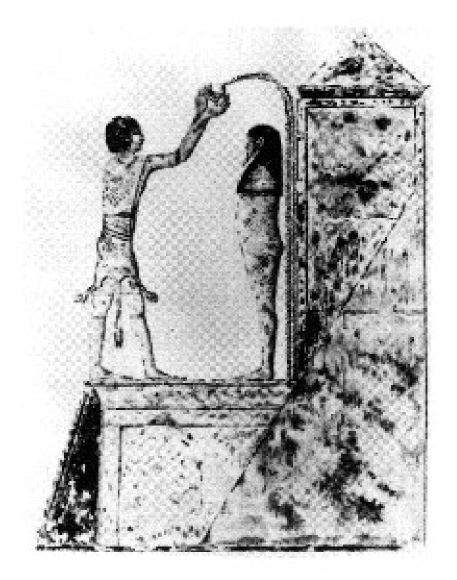


FIGURA 16a

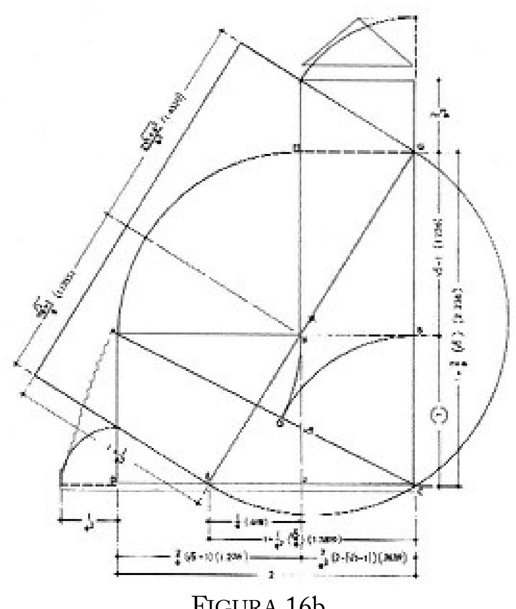


FIGURA 16b

Es importante dejar claro que es virtualmente imposible demostrar que la Proporción Áurea no aparece en algunos artefactos egipcios cuando sólo se presentan evidencias en forma de cálculos de algunas dimensiones. Sin embargo, en ausencia de ninguna otra documentación, las dimensiones de una obra de arte o el diseño arquitectónico deben ser tales que la Proporción Áurea, literalmente, salte a la vista, en lugar de estar enterrada a tal profundidad que se haga necesario un análisis complejísimo para sacarla a la luz. Como veremos más adelante, investigaciones detalladas de diversos casos mucho más recientes, de los cuales se había afirmado en la literatura que los artistas habían usado la Proporción Áurea, han demostrado el nulo fundamento de tales aseveraciones.

En lugar de continuar con objetos más bien oscuros, tales como la estela egipcia fechada alrededor del 2150 a.C., y que según algunos presenta dimensiones en proporción a

Φ, dirigiremos nuestra atención hacia el acontecimiento principal: la Gran Pirámide de Khufu.

LA PIRÁMIDE DE LOS NÚMEROS

Según la tradición, el rey Menes (o Narmer), gobernante del Alto Egipto, conquistó el reino rival del Bajo Egipto (en el delta del Nilo) y unificó ambos en un solo reino alrededor del 3110 a.C. Durante la tercera dinastía (circa 2780-2680 a.C.) se introdujo la adoración al sol como forma básica de religión, así como la momificación y la construcción de enormes monumentos de piedra. La era de las grandes pirámides alcanzó su punto álgido durante la cuarta dinastía, alrededor del 2500 a.C., con la famosa tríada de pirámides de Giza (figura 17). La «Gran Pirámide» (al fondo en la fotografía) no únicamente se erige como un monumento al rey sino también como testimonio del éxito de la organización unificada de la antigua sociedad egipcia. El investigador Kurt Mendelssohn, en su obra de 1974, *The Riddle of the Pyramids*, llegó a la conclusión de que, en gran medida, el objeto de todo el ejercicio constructivo de las pirámides no era su uso como recipiente donde se colocaban los productos finales (su función como tumba), sino su manufactura. En otras palabras, lo importante no eran las pirámides en sí sino la *construcción* de las pirámides. Esto explicaría la aparente disparidad entre el tremendo esfuerzo de apilar unos 20 millones de toneladas de piedra caliza extraída de las canteras y el mero propósito de enterrar en su interior a tres faraones.

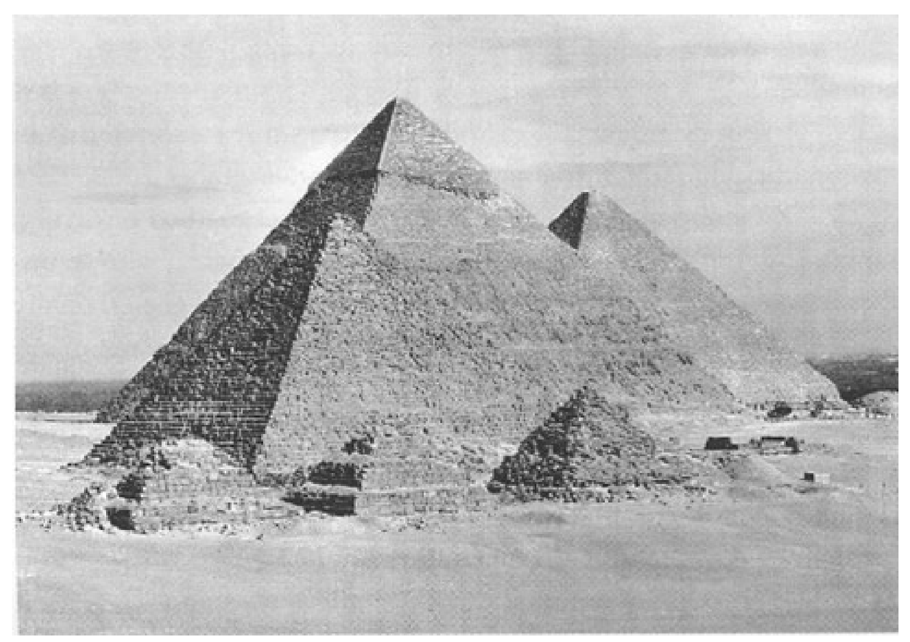


FIGURA 17

En 1996, el egiptólogo amateur Stuart Kirkland Wier, quien trabajaba bajo el patrocinio del Museo de Historia Natural de Denver, estimó que para la construcción de la Gran Pirámide de Giza se necesitaron unos 10.000 trabajadores. Un cálculo de la energía necesaria para trasladar los bloques de piedra desde la cantera al emplazamiento de la pirámide, así como aquella necesaria para elevar las piedras hasta la altura requerida, dio a Wier la cantidad total de trabajo invertido. Teniendo en cuenta que la construcción se alargó durante veintitrés años (la duración del reinado del rey Khufu), y extrapolando algunas cifras razonables sobre el rendimiento energético diario de un trabajador egipcio y el calendario constructivo, Wier pudo estimar la magnitud de la fuerza de trabajo.

Hasta hace poco, la datación de las pirámides de Giza dependía en gran medida de las listas de reyes conservadas y de la duración de sus reinados. Dado que las mencionadas listas son escasas, incompletas y están repletas de errores, las

cronologías tienen una orquilla de precisión, en la mayoría de casos, de unos cien años. (La datación mediante el carbono radioactivo contiene una incertidumbre similar). En un artículo publicado en la revista *Nature* en noviembre de 2000, Kate Spence, de la Universidad de Cambridge, propuso otro método de datación que situaba la Gran Pirámide de Khufu en el 2480 a.C., con una incertidumbre de tan sólo 5 años. El método de Spence ya había sido propuesto por el astrónomo Sir John Herschel a mediados del siglo XIX, y se basaba en el hecho de que las pirámides siempre se orientaban hacia el norte con extraordinaria precisión. Por ejemplo, la orientación de la Gran Pirámide de Giza tiene una desviación norte de menos de 3 minutos de arco (un escaso 5 por ciento de un grado). Es evidente que los egipcios utilizaron las observaciones astronómicas para determinar la dirección norte con tanta precisión.

El polo norte celeste se define como un punto en el cielo que está alineado con el eje de rotación de la tierra, alrededor del cual parece que giran las estrellas. De todos modos, el propio eje de la Tierra no está fijo, sino que se bambolea muy lentamente tal y como lo hace el eje de una peonza o giroscopio. Como resultado de este movimiento, conocido con el nombre de precesión, da la sensación de que el polo norte celeste traza cada 26.000 años un enorme círculo en el cielo del hemisferio norte. Aunque en la actualidad el polo norte celeste se determina (con la precisión de un grado) mediante la Estrella Polar, Polaris (conocida con el nombre astronómico de α-Ursae Minoris), no ocurría lo mismo en la época en que se construyó la Gran Pirámide. Spence, identificando mediante experimentos las dos estrellas que los antiguos egipcios usaban para fijar el norte, ζ-Ursae Majoris y β-Ursae Minoris, y tras un cuidadoso examen de los alineamientos de las ocho

pirámides, pudo determinar la fecha en que se completó la pirámide de Khufu en el 2480 a.C. ± 5, unos setenta y cuatro años menos que las estimaciones anteriores.

Pocas estructuras arqueológicas han generado tanta mitología y controversia como la Gran Pirámide. La preocupación por la pirámide, o el lado oscuro de la piramidología, fue, por ejemplo, un tema central del culto de los rosacruces (culto fundado en 1459 por el cristiano Rosenkreuz). Los miembros de este culto pretendían ahondar en el conocimiento de los secretos naturales, signos mágicos y cuestiones similares. La masonería tiene su origen en algunas facciones del culto rosacruz.

Probablemente, el interés moderno en la piramidología empezó con la obra, repleta de referencias religiosas, del editor inglés jubilado John Taylor, *The Great Pyramid: Why Was It Built and Who Built It?*, aparecida en 1859. Taylor estaba tan convencido de que la pirámide contenía una serie de dimensiones inspiradas en realidades matemáticas que eran desconocidas para los antiguos egipcios, que llegó a la conclusión de que su construcción fue el resultado de la intervención divina. Taylor, influido por la idea, entonces en boga, de que los británicos eran los descendientes de las tribus perdidas de Israel, propuso, por ejemplo, que la unidad básica de medición de la pirámide era la misma que la del codo bíblico (algo más de 25 pulgadas británicas; exactamente igual que 25 «pulgadas de la pirámide»). Se cree que esta unidad también fue utilizada por Noé para construir el Arca y por el Rey Salomón para la construcción del Templo. Taylor aún fue más lejos al afirmar que dicho codo sagrado fue escogido por orden divina sobre la base de la longitud del radio de la Tierra desde el centro hasta el polo, y que la «pulgada de la pirámide» era 500 millones de

veces el eje polar de la Tierra. El estrafalario libro de Taylor encontró a un gran admirador en Charles Piazzi Smyth, el Astrónomo Real de Escocia, quien publicó en la década de 1860 ni más ni menos que tres enormes tomos (el primero de ellos titulado *Our Inheritance in the Great Pyramid*) dedicados a la Gran Pirámide. En parte, el entusiasmo de Piazzi Smyth provenía de sus duras objeciones a los intentos de introducción en Gran Bretaña del sistema métrico. Su lógica seudo-científica/teológica funcionaba del siguiente modo: la Gran Pirámide fue diseñada en pulgadas; las propiedades matemáticas de la pirámide muestran que fue construida por inspiración divina; por tanto, la pulgada es una unidad otorgada por Dios, al contrario que el centímetro, que fue inspirado «por la revolución más salvaje, sangrienta y atea» (la Revolución francesa). Piazzi Smyth escribe lo siguiente al exponer sus opiniones respecto al debate sobre el sistema de medidas (en *The Great Pyramid, Its Secrets and Mysteries Revealed*):

> Por tanto, no fue por la fuerza de la oratoria dispersa emitida en defensa de la metrología británica en el Parlamento, en donde tantas veces fueron revocadas las leyes de los agitadores métricos pro-franceses, sino más bien por los pecados de ese sistema tan desmesurado; y para impedir que una nación elegida, una nación conservada a lo largo de la historia… impedir que esa nación, sin darse cuenta, se robe a sí misma en nombre de lo infausto, vestida con las propias ropas del Anticristo; y como Esaú, por un plato de sopa, por unas pocas y fugaces ganancias mercantiles de más, echar por la borda una institución con derecho de nacimiento que a nuestra raza de Abraham se le encargó mantener hasta que la consumación del misterio de Dios alcance a toda la humanidad.

Tras leer el texto anterior no debería sorprendernos descubrir que el autor Leonard Cottrell decidiera titular el capítulo que dedicó a Charles Piazzi Smyth en su obra *The Mountains of Pharaoh*, «The Great Pyramidiot[2]».

En líneas generales, tanto Piazzi Smyth como Taylor reavivaron con sus análisis de la pirámide basados en la numerología, la obsesión pitagórica por el número 5. Ambos señalaron que la pirámide tenía, evidentemente, cinco vértices y cinco caras (contando la base); que el «codo sagrado» tenía unas 25 (5 al cuadrado) pulgadas (o, para ser exactos, 25 «pulgadas de la pirámide»); que la «pulgada de la pirámide» era 500 millones de veces el eje polar de la Tierra, etc.

El escritor Martín Gardner dio con un divertido ejemplo que demostraba la absurdidad de los análisis basados en el cinco de Piazzi Smyth. En su obra *Fads and Fallacies in the Name of Science*, Gardner escribe:

> Si uno busca los datos del Monumento a Washington en el *World Almanac*, encontrará numerosas referencias al 5. Su altura es de 555 pies y 5 pulgadas. La base tiene 55 pies cuadrados y las ventanas están situadas a 500 pies de la base. Si multiplicamos la base por 60 (o 5 veces el número de meses del año) obtendremos 3.300, el peso exacto en libras de la piedra que corona el edificio. Además, la palabra «Washington» tiene exactamente diez letras (dos veces cinco). Y si multiplicamos el peso de la piedra que corona el edificio por la base del mismo, el resultado es 181.500, una aproximación bastante precisa de la velocidad de la luz en millas por segundo.

No obstante, a continuación revelaremos la declaración más dramática respecto a la Gran Pirámide en el contexto de nuestro interés por la Proporción Áurea. En el mismo libro, Gardner hace referencia a una afirmación que, de ser cierta, demostraría que realmente la Proporción Áurea formaba parte del diseño de la Gran Pirámide. Según Gardner: «Heródoto afirma que la Pirámide fue construida para que el área de cada una de sus caras fuera igual al área de un cuadrado cuyo lado fuera igual a la altura de la Pirámide». El gran orador romano Cicerón (106-43 a.C.) denominó al historiador griego Heródoto (circa 485-425 a.C.) «el padre

de la historia». A pesar de que Gardner no se percató totalmente de las implicaciones de la aseveración de Heródoto, no fue ni el primero ni el último en presentarla.

En un artículo titulado «British Modular Standard of Lenght», que apareció en *The Athenaum* el 28 de abril de 1860, el famoso astrónomo británico Sir John (Frederick William) Herschel (1792-1871) escribió:

> La misma inclinación, … pertenece a una pirámide que se caracteriza por la propiedad de tener cada una de sus caras iguales al cuadrado descrito respecto a su altura. Ésta es la relación característica, según nos dice claramente Heródoto, que los constructores pretendieron incorporar, y que hoy en día sabemos que realmente incorporaron.

Recientemente, en 1999, el autor y experto en telecomunicaciones francés Midhat J. Gazalé señaló lo siguiente en su interesante obra *Gnomon: From Pharaohs to Fractals:* «Se dice que Heródoto, el historiador griego, aprendió de los sacerdotes egipcios que la altura al cuadrado de la Gran Pirámide era igual al área de sus caras triangulares». ¿Por qué es tan importante esta afirmación? ¡Por la sencilla razón de que es lo mismo que decir que la Gran Pirámide fue diseñada para que la proporción de la altura de su cara triangular hasta la mitad del lado de la base fuera igual a la Proporción Áurea!

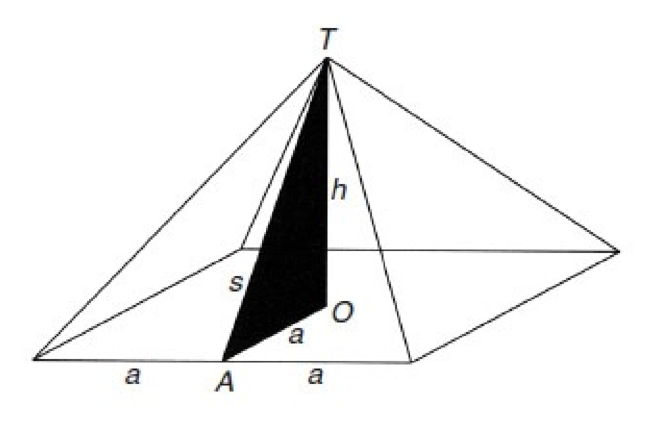


FIGURA 18

Examinen un instante el croquis de la pirámide de la figura 18 en el cual *a* representa la mitad del lado de la base, *s* la altura de la cara triangular y *h* la altura de la pirámide. Si la afirmación atribuida a Heródoto es correcta, significaría que h^2 (la altura al cuadrado de la pirámide) es igual a $s \times a$ (el área de la cara triangular; ver apéndice 3). Mediante simple geometría elemental podemos afirmar que esta equivalencia significa que la proporción *s/a* es exactamente igual a la Proporción Áurea. (La prueba aparece en el apéndice 3). La pregunta que surge a continuación es: ¿realmente es así? La base de la Gran Pirámide de hecho no es un cuadrado perfecto ya que las longitudes de sus lados van desde los 230,25 a los 230,45 m. El promedio de las longitudes es $2a$ = 230,35 m. La altura de la pirámide es h = 146,73 m. A partir de los valores anteriores sabemos (usando el teorema de Pitágoras) que la altura de la cara triangular *s* es igual a 186,54 m. Por tanto, sabemos que *s/a* = 186,54/115,18 = 1,62, lo que ciertamente se acerca mucho (con una diferencia de menos del 0, 1 por ciento) a la Proporción Áurea.

En apariencia, por tanto, esta evidencia significaría que los antiguos egipcios conocían realmente la Proporción Áurea, dado que no únicamente aparece el número en la proporción de las dimensiones de la Gran Pirámide sino que su presencia parece corroborarse por las intenciones de los diseñadores según la documentación histórica representada por las afirmaciones de Heródoto. Pero ¿es esto cierto? ¿o estamos ante lo que Roger Herz-Fischler, matemático y escritor canadiense, definió como «uno de los juegos de manos más ingeniosos de la historia “científica”»?

Resulta evidente que, dado que el cálculo de las dimensiones no puede alterarse, la única parte de la «evidencia» sobre la presencia de la Proporción Áurea que puede ponerse en duda es la afirmación de Heródoto. A pesar de las numerosas repeticiones de la cita en su *Historia* o incluso de que nadie puede interrogar a un hombre que vivió hace 2.500 años, al menos cuatro investigadores se han embarcado en un trabajo «detectivesco» para averiguar lo que realmente dijo o pretendió decir Heródoto. Tanto Herz-Fischler como George Markowsky, matemático de la Universidad de Maine, han resumido los resultados de dos de las mencionadas investigaciones.

El texto original de la *Historia* de Heródoto aparece en el párrafo 124 del libro II, titulado *Euterpe*. Según la traducción tradicional, se puede leer lo siguiente: «Su base es cuadrada, cada lado mide ocho *pletra* de largo y su altura es igual» o «Es un cuadrado de ochocientos pies por cada lado, y un largo igual». Un pletra son 100 pies griegos (aproximadamente 30,5 metros).

Estos textos no se parecen mucho a lo que ha sido presentado como una cita (la altura al cuadrado es igual al área de una cara) de Heródoto. Además, las cifras de las dimensiones de la pirámide que menciona Heródoto están lejos de la realidad. La altura de la Gran Pirámide ni siquiera se acerca a los 800 pies (sólo mide unos 481 pies), e incluso el lado de su base cuadrada (unos 756 pies) mide bastante menos de 800 pies. Por tanto, ¿de dónde ha salido esa cita? La primera pista nos la proporciona un artículo de Sir John Herschel publicado en *The Athenaeum*. Según éste, debe otorgarse a John Taylor, en su libro *The Great Pyramid, Why Was It Built and Who Built It?*, «el mérito de indicar» tanto la propiedad de la pirámide como la cita de Heródoto.

Herz-Fischler localizó la equivocación en lo que parece no ser más que un error de interpretación de Heródoto en el infame libro de John Taylor.

Taylor empieza con una traducción de Heródoto que no parece diferir demasiado de las anteriores: «de esta Pirámide, que tiene cuatro lados, cada una de las caras tiene, en cada lado, 8 pletra y su altura es la misma». Sin embargo, a continuación deja volar su imaginación al suponer que lo que Heródoto quiere decir es que el número de pies al cuadrado de cada lado es igual al número de pies al cuadrado en un cuadrado con un lado igual a la altura de la pirámide. A pesar de esta interpretación «imaginativa», Taylor tiene aún un pequeño problema que resolver: el número mencionado (ocho pletra) está muy lejos de las medidas reales. La solución sugerida es incluso más espantosa. Sin ningún tipo de justificación, Taylor afirma que el ocho pletra debe multiplicarse por el área de la base de una de las pequeñas pirámides situadas al este de la Gran Pirámide.

La conclusión final es que difícilmente puede utilizarse el texto de Heródoto para documentar la presencia de la Proporción Áurea en la Gran Pirámide. La interpretación absolutamente infundada del texto instigada por el libro de Taylor (y repetida a continuación innumerables veces) no se aguanta por ningún lado, y sólo representa otro caso de juego de números.

No todo el mundo está de acuerdo con esta conclusión. En un artículo titulado «The Icosahedral Design of the Great Pyramid», que apareció en el año 1992, Hugo F. Verheyen propone que la Proporción Áurea en tanto símbolo místico, pudo haberse mantenido oculta en el diseño de la Gran Pirámide «como un mensaje para aquellos que lo entiendan». No obstante, como veremos más

adelante, las razones para dudar de la presencia de la Proporción Áurea en el diseño de la Gran Pirámide son más numerosas.

Al descubrir que la Gran Pirámide rivaliza con la legendaria ciudad de Atlantis en el número de libros que se le dedican, no debería sorprendernos saber que Φ no ha sido el único número invocado en piramidología; también lo ha sido π.

Aunque la teoría π apareció por primera vez en 1838 en *Letter from Alexandria, on the Evidence of the Practical Application of the Quadrature of the Circle, in the Configuration of the Great Pyramids of Egypt* de H. Agnew, a quien se le reconoce el mérito es a Taylor, quien simplemente reprodujo la teoría de Agnew. Según éste, la proporción de la circunferencia de la base (8*a* según nuestra notación anterior, en la cual *a* representa la mitad del lado de la base) respecto a la altura de la pirámide (*h*) es igual a 2π. Si utilizamos los mismos cálculos de dimensiones que hemos usado anteriormente, el resultado es $8a/h = 4 \times 755{,}79/481{,}4 = 6{,}28$; por tanto, igual a 2π con extraordinaria precisión (sólo difiere en un 0,05 por ciento).

Lo primero que debemos señalar, por tanto, es que sólo con las dimensiones de la propia Gran Pirámide sería imposible determinar si phi o pi, *si alguno de los dos*, era un factor que formaba parte del diseño de la pirámide. De hecho, en un artículo publicado en 1968 en la revista *The Fibonacci Quaterly*, el coronel R. S. Beard, de Berkeley, California, concluye que: «De modo que tira los dados y escoge tu propia teoría».

Si tenemos que escoger entre π y Φ como colaboradores potenciales a la arquitectura de la pirámide, π dispone de una ventaja clara sobre Φ. En primer lugar, el

Papiro de Rhind (Ahmes), una de las principales fuentes para el conocimiento de las matemáticas egipcias, informa que los antiguos egipcios del siglo XVII a.C. conocían, al menos aproximadamente, el valor de π, mientras que no existe evidencia alguna sobre el conocimiento de Φ. Recuerden que Ahmes copió este manual de las matemáticas alrededor del 1650 a.C., durante el periodo de los Hyksos o reyes pastores. De todos modos, Ahmes sitúa el documento original en la época del rey Ammenemēs III de la duodécima dinastía; no es descabellado pensar (aunque bastante improbable) que el contenido del documento ya se conociera cuando se construyó la Gran Pirámide. El papiro contiene ochenta y siete problemas matemáticos precedidos por una tabla de fracciones. Existen suficientes evidencias (en forma de papiros y otros registros) que demuestran que la tabla siguió siendo una referencia durante unos dos mil años. En su introducción, Ahmes describe dicho documento como «la puerta al conocimiento de todo lo que existe y todos los oscuros secretos». La estimación egipcia de π aparece en el problema número 50 del Papiro Rhind, el cual se ocupa de determinar el área de un campo circular. La solución de Ahmes sugiere lo siguiente: «Quita $^1/_9$ del diámetro y eleva al cuadrado el resto». Con esto podemos deducir que los egipcios aproximaron el valor de π al de $^{256}/_{81}$ = 3,16049…, alejado en menos del 1 por ciento del valor correcto 3,14159…

Un segundo hecho que otorga ventaja a π sobre Φ es la interesante teoría según la cual los constructores incorporaron a π en el diseño de la pirámide incluso sin conocer su valor. Esta teoría fue propuesta por Kurt Mendelssohn en *The Riddle of the Pyramids*. La lógica de Mendelssohn funciona de este modo: dado que absolutamente todas las evidencias indican que los egipcios

del Antiguo Reino sólo disponían de un conocimiento rudimentario de matemáticas, la presencia de π en la geometría de la pirámide debe ser la consecuencia de un concepto de diseño más práctico que teórico. Según Mendelssohn, los antiguos egipcios debieron utilizar diferentes unidades de longitud para calcular las distancias verticales y horizontales. Así, pudieron utilizar cuerdas de fibra de palma para medir la altura de la pirámide (en unidades de codo) y tambores giratorios (un codo de diámetro) para medir la longitud de la base. De este modo, las longitudes horizontales se habrían obtenido contando las revoluciones en unidades que podríamos denominar «codos rodantes». Entonces lo único que tenía que hacer el arquitecto egipcio era decidir cuántos codos tenían que construir verticalmente sus trabajadores por cada codo rodante horizontal. Dado que un codo rodante es de hecho igual a π codos (la circunferencia de un círculo con un diámetro de un codo), este método de construcción imprimiría el valor de π en el diseño de la pirámide sin que los constructores ni siquiera se dieran cuenta.

Aunque es evidente que no hay forma alguna de comprobar directamente las especulaciones de Mendelssohn, algunos egiptólogos afirman que sí existen evidencias directas que sugieren que *ni la Proporción Áurea ni pi* fueron usados en el diseño de la Gran Pirámide (ni siquiera de forma inadvertida). Esta última teoría está basada en el concepto del *seked*, una simple medida de la inclinación de los lados de la pirámide o, de forma más precisa, el número de codos horizontales que deben desplazarse por cada codo vertical. Es evidente que éste era un importante concepto práctico para los constructores, quienes necesitaban mantener un modelo constante para la colocación del siguiente bloque de piedra. En los problemas

56 y 60 del Papiro Rhind encontramos cálculos del seked, descritos con gran detalle en el excelente libro de Richard J. Gillings *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. En 1883, Sir Flinders Petrie descubrió que la elección de un determinado seked (inclinación del lado de la pirámide) otorga a la Gran Pirámide una propiedad de «proporción de la circunferencia de la base respecto a la altura de la pirámide igual a 2 π» muy precisa, en la cual π no tiene papel alguno en el diseño. Los partidarios de la hipótesis seked señalan que en la pirámide escalonada de Meidum, construida en Giza justo antes de la Gran Pirámide, encontramos precisamente el mismo seked.

No todo el mundo está de acuerdo con la teoría del seked. Kurt Mendelssohn escribe: «Se han sugerido multitud de explicaciones matemáticas, e incluso una de ellas, obra del notable arqueólogo (Petrie), y que afirma que los constructores utilizaron accidentalmente una proporción de $^{14}/_{11}$ (= $^{28}/_{22}$, lo que se acerca mucho a 4/π), continúa siendo lamentablemente poco convincente». Por otro lado, Roger Herz-Fischler, quien examinó por lo menos nueve teorías propuestas para el diseño de la Gran Pirámide, concluyó en un artículo publicado en 1978 en la revista *Crux Mathematicorum* que muy probablemente la teoría del seked era la correcta.

Desde nuestro punto de vista, sin embargo, si es correcta alguna de las dos hipótesis, seked o rodantes, entonces la Proporción Áurea no jugó papel alguno en el diseño de la Gran Pirámide.

En consecuencia, ¿podemos dar por cerrado el caso de la Proporción Áurea y de la Gran Pirámide tras 4.500 años? Aunque la idea es atractiva, desafortunadamente la historia nos demuestra que el atractivo místico de las pirámides y la

Numerología Áurea pueden ser más fuertes que las sólidas evidencias. A pesar de que disponemos de los argumentos de Petrie, Gillings, Mendelssohn y Herz-Fischler desde hace décadas, se han seguido publicando numerosos libros que repiten la falacia de la Proporción Áurea.

Como conclusión diremos que es altamente improbable que los antiguos babilonios o los antiguos egipcios descubrieran la Proporción Áurea y sus propiedades; esta tarea quedó en manos de los matemáticos griegos.

4
EL SEGUNDO TESORO

La geometría posee dos grandes tesoros; uno es el Teorema de Pitágoras;
El otro, la división de una línea entre la proporción media y extrema.
Al primero podemos compararlo con una medida de oro;
Al segundo podemos denominarlo una preciosa joya.
JOHANNES KEPLER (1571-1630)

No hay duda de que todo aquel que haya crecido en la civilización occidental o de Oriente Medio es heredero de los antiguos griegos en lo que se refiere a las matemáticas, la ciencia, la filosofía, el arte y la literatura. La frase del poeta alemán Goethe —«De todos los pueblos, son los griegos los que mejor han soñado el sueño de la vida»— es tan sólo un pequeño tributo a los esfuerzos pioneros de los griegos en las ramas del conocimiento que inventaron y dieron nombre.

Sin embargo, incluso las conquistas de los griegos en muchos otros ámbitos palidecen al compararlos con sus impresionantes logros en el campo de las matemáticas. Por ejemplo, en el transcurso de tan sólo 400 años, desde Tales de Mileto (circa 600 a.C.) hasta «el Gran Geómetra» Apolonio de Perga (circa 200 a.C.), los griegos sentaron las bases de la geometría.

La excelencia griega en matemáticas fue, en su mayor parte, una consecuencia directa de su pasión por el conocimiento puro más que por cuestiones prácticas. Cuenta una historia que un estudiante, tras haber aprendido una proposición geométrica con Euclides, preguntó a éste: «¿pero qué gano con esto?» Euclides le ordenó a su esclavo que entregara al muchacho una moneda para que viera una ganancia.

El currículo educativo de los hombres de Estado en la época de Platón incluía la aritmética, la geometría, la geometría sólida, la astronomía y la música, disciplinas que según el pitagórico Árquitas entraban en la definición general de matemáticas. Cuenta la leyenda que cuando Alejandro Magno le pidió a su profesor Menaechmo (a quien se le atribuye el descubrimiento de las curvas de la elipse, la parábola y la hipérbola) que le enseñara un atajo para la geometría, éste le contestó: «Oh, Rey, para viajar por el país existen caminos reales y caminos para los ciudadanos comunes; pero en geometría sólo existe un camino para todos».

PLATÓN

En este entorno intelectual aparece Platón (428/427 a.C.-348/347 a.C.), una de las mentes más influyentes de la antigua Grecia y de la civilización occidental en general. Se dice que Platón estudió matemáticas con el pitagórico Teodoro de Cirene, el primero en demostrar que no sólo la $\sqrt{2}$ es irracional sino también números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, e incluso $\sqrt{17}$. (Nadie sabe con seguridad por qué paró en 17, pero evidentemente no tenía ninguna prueba general). Algunos investigadores afirman que puede que Teodoro también hubiera usado una línea seccionada en Proporción Áurea para ofrecer lo que podría ser la prueba más sencilla de la inconmensurabilidad. (La idea es básicamente la misma que la presentada en el apéndice 2.)

Como afirma Platón en *La República*, las matemáticas eran obligatorias en la educación de todos los líderes de Estado y filósofos. De ahí que la inscripción en la entrada a su escuela (la Academia) rezara: «Que nadie que carezca de geometría atraviese mis puertas». El historiador de las matemáticas David Eugene Smith lo describe en su libro

Our Debt to Greece and Rome como el primer requerimiento de entrada a una escuela de la historia. La admiración de Platón por las matemáticas también se manifiesta al hablar con cierta envidia de la actitud hacia las matemáticas en Egipto, donde «los juegos de aritmética se han inventado para que los utilicen los niños, mediante los cuales la aprenden con placer y entretenimiento».

Para considerar el papel de Platón en las matemáticas en general y en la Proporción Áurea en particular, debemos examinar no sólo sus contribuciones meramente matemáticas, no demasiado significativas, sino los efectos de su influencia y ánimo sobre las generaciones de matemáticos contemporáneas a él y posteriores. Hasta cierto punto, Platón puede considerarse uno de los primeros auténticos teóricos. Sus inclinaciones teóricas se ejemplifican mejor a través de su actitud hacia la astronomía, donde, en lugar de observar las estrellas en su movimiento, defiende que «se dejen los cielos en paz», concentrándose en el cielo más abstracto de las matemáticas. Según Platón, las estrellas representan simplemente a éste, del mismo modo que las entidades abstractas de un punto, una línea y un círculo son representadas por dibujos geométricos. Curiosamente, Sir Thomas Heath, en su asombroso libro *A History of Greek Mathematics* (1921), escribe: «Resulta difícil saber lo que Platón quería decir con el contraste que se establece entre el entramado visible del cielo (las estrellas visibles y su disposición), que son hermosos, y los auténticos entramados que sólo imitan y son infinitamente más bellos y maravillosos».

Como teórico astrofísico debo admitir que siento bastante afinidad con algunos de los sentimientos expresados por el tema subyacente de Platón. Aquí se

distingue entre la propia belleza del cosmos y la belleza de la teoría que explica el cosmos. Permítanme aclararlo mediante un sencillo ejemplo, el principio del cual fue descubierto por el famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528).

Se pueden unir seis pentágonos (figura 19) para hacer un pentágono mayor, con cinco agujeros con la forma de T*riángulos Áureos* (triángulos isósceles con una proporción del lado a la base de Φ). Seis de estos pentágonos, a su vez, se juntan para crear un pentágono aún mayor (y con más agujeros), y así sucesivamente.

Creo que todo el mundo estará de acuerdo en que la figura que se obtiene (figura 19) es extremadamente bella. Pero esta forma contiene un atractivo matemático adicional, que se encuentra en la simplicidad del principio subyacente de su construcción. Creo que éste es el cielo matemático al que se refería Platón.



FIGURA 19

No hay duda de que la labor de guía de Platón fue más importante que sus contribuciones directas. Un texto del siglo I atribuido a Filodemo reza: «Un gran avance en matemáticas (se logró) durante aquella época; Platón dirigía y planteaba los problemas, y los matemáticos los investigaban con gran dedicación».

Sin embargo, el propio Platón tenía gran interés en las propiedades de los números y de las figuras geométricas. En *Las Leyes*, por ejemplo, propone que el número óptimo de ciudadanos de un Estado es de 5.040 porque: *a*) es el producto de 12, 20 y 21; *b*) su doceava parte puede dividirse por 12, y *c*) tiene 59 divisores, incluidos todos los números enteros del 1 al 12 (excepto el 11, pero el 5.038, muy próximo a 5.040, es divisible por 11). La elección de este número y sus propiedades permite a Platón desarrollar su visión socioeconómica. Por ejemplo, la tierra del Estado se divide en 5.040 terrenos, de los cuales 420 constituyen el territorio de cada una de las 12 «tribus». La población del Estado se divide en cuatro categorías sociales: ciudadanos libres y sus esposas e hijos; sus esclavos; extranjeros residentes, y una población diversa de extranjeros visitantes. En las elecciones al consejo, los miembros de cada una de las cuatro categorías con propiedades votan a noventa miembros de cada clase.

Otro número que a menudo se asocia a Platón es el 216. Platón lo menciona en *La República*, en un pasaje oscuro que hace referencia al hecho de que 216 es igual a 6 al cubo, siendo 6 uno de los números que representa el matrimonio (ya que es el producto del femenino 2 por el masculino 3). Platón, discípulo de los pitagóricos, tuvo también en cuenta el hecho de que la suma de los cubos de los lados del famoso triángulo pitagórico 3-4-5 es igual a 216.

Platón y la Sección Áurea están unidos principalmente a través de dos aspectos que le eran particularmente cercanos: la inconmensurabilidad y los *sólidos platónicos*. En *Las Leyes*, Platón expresa la vergüenza que siente por haber sabido tan tarde de las longitudes inconmensurables y de los

números irracionales, y se lamenta de que muchos griegos de su generación todavía desconocieran la existencia de tales números.

Platón reconoce (en *Hippias Mayor*) que si un número par puede ser la suma de, o bien dos números pares, o bien dos números impares, también la suma de dos irracionales puede ser irracional o racional. Como ya sabemos que Φ es irracional, una línea recta racional (por ejemplo, de unidad de longitud) dividida en una Sección Áurea nos muestra esto último, aunque quizás Platón lo desconocía. Algunos investigadores afirman que Platón poseía un interés directo por la Sección Áurea. Señalan que cuando Proclo Diadoco (circa 411-485) dijo (en *Comentarios sobre el primer libro de los Elementos de Euclides*) que «Eudoxo … multiplicó el número de teoremas que Platón originó en lo que a la "sección" se refiere» podría aludir a la relación entre Platón (y Eudoxo) con la Sección Áurea. Sin embargo, dicha interpretación ha dado pie a una seria controversia desde la segunda mitad del siglo XIX entre muchos investigadores que han llegado a la conclusión de que la palabra «sección» probablemente no tenía nada que ver con la Sección Áurea, sino que se refería a la sección de sólidos o a la sección general de líneas. De todos modos, no hay duda de que la mayor parte del trabajo de campo que llevó a la definición y comprensión de la Proporción Áurea se llevó a cabo durante los años que precedieron a la apertura de la Academia de Platón en el 386 a.C. y durante todo el periodo en el que la Academia estuvo en funcionamiento. La figura clave y el motor de los teoremas geométricos sobre la Proporción Áurea probablemente fue Teateto (circa 417 a.C.-circa 369 a.C.), quien, según la colección bizantina *Suidas* «fue el primero en construir los denominados cinco sólidos». Pappo, matemático del siglo IV, nos cuenta que Teateto

también fue el primero en haber «distinguido los poderes conmensurables en longitud de los inconmensurables». Teateto no estaba directamente vinculado a la Academia, pero seguramente mantenía ciertas conexiones informales con ella.

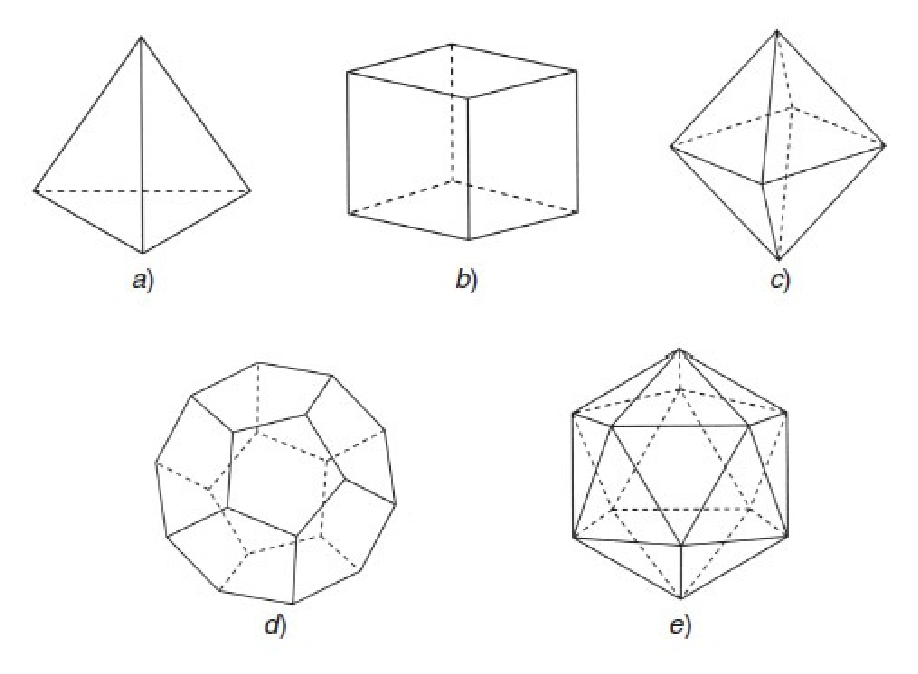


FIGURA 20

En su obra *Timeo*, Platón acepta la enorme tarea de debatir sobre el origen y el funcionamiento del cosmos. En concreto, intenta explicar la estructura de la materia utilizando los cinco sólidos regulares (o poliedros), que ya habían sido investigados, hasta cierto punto, por los pitagóricos, y de un modo extenso por Teateto. Los cinco sólidos platónicos (figura 20) se distinguen por las propiedades siguientes: son los únicos sólidos en los que todas sus caras (de un sólido dado) son idénticas y equiláteras; además, cada uno de los sólidos puede inscribirse en una esfera (tocando la esfera todos sus vértices). Los sólidos platónicos son el tetraedro (con cuatro

caras triangulares, figura 20*a*), el cubo (con seis caras cuadradas, figura 20*b*), el octaedro (con ocho caras triangulares, figura 20*c*), el dodecaedro (con doce caras pentagonales, figura 20*d*), y el icosaedro (con veinte caras triangulares, figura 20*e*).

Platón combinó las ideas de Empédocles (circa 490-430 a.C.), que describía los cuatro elementos de la materia como tierra, agua, aire y fuego, con la teoría «atómica» de la materia (la existencia de partículas indivisibles) de Demócrito de Abdera (circa 460 a.C.-circa 370 a.C.). Su teoría «unificada» proponía que cada uno de los cuatro elementos correspondía a una clase diferente de partícula fundamental y que se representaba por uno de los sólidos platónicos. Debemos percatarnos de que, aunque evidentemente los detalles han cambiado de un modo considerable, la idea básica que subyace en la teoría de Platón no es tan diferente de la formulación de la química moderna descrita por John Dalton en el siglo XIX. Según Platón, la Tierra se asocia al cubo estable; la cualidad «penetrante» del fuego con el puntiagudo y relativamente simple tetraedro; el aire, con la apariencia «móvil» del octaedro, y el agua con el icosaedro de múltiples caras. Platón (en *Timeo*) asignó el quinto sólido, el dodecaedro, al universo en su totalidad, o, con sus propias palabras, el dodecaedro es lo que «la divinidad utilizó para tejer las constelaciones por todo el cielo». Ésta es la razón por la que el pintor Salvador Dalí decidió incluir un enorme dodecaedro flotando por encima de la mesa de la cena en su obra *Sacramento de la Última Cena* (figura 5).

La ausencia de un elemento fundamental que se relacionara con el dodecaedro no fue aceptada por todos los seguidores de Platón, algunos de los cuales postularon la

existencia de un quinto elemento. Por ejemplo, Aristóteles escogió el éter, el material de los cuerpos celestiales que según su opinión cubría el universo entero, como quinta esencia cósmica (quintaesencia). Postuló que al encontrarse en toda materia, esta quinta esencia hacía posible el movimiento y el cambio de acuerdo con las leyes de la naturaleza. La idea de una sustancia que llena todo el espacio como medio necesario para la propagación de la luz continuó vigente hasta que en 1887 un famoso experimento, elaborado por el físico estadounidense Albert Abraham Michelson y el químico Edward Williams Morley, demostró que tal medio no existía (ni tampoco era necesario para la moderna teoría de la luz). Básicamente, este experimento medía la velocidad de dos rayos de luz lanzados en diferentes direcciones. Se esperaba que las velocidades de los rayos serían diferentes, debido al movimiento de la Tierra por el éter, pero el experimento demostró categóricamente lo contrario. El resultado del experimento Michelson-Morley puso a Einstein en camino de la teoría de la relatividad.

En 1998 se produjo un sorprendente giro de los acontecimientos cuando dos equipos de astrónomos descubrieron no sólo que nuestro universo se expande (descubierto por el astrónomo Edwin Hubble en la década de 1920), sino que esta expansión se estaba *acelerando*. Dicho descubrimiento conmocionó a los astrónomos que, evidentemente, suponían que a causa de la gravedad, la expansión debería ralentizarse. Del mismo modo que un balón lanzado hacia lo alto se frena debido a la fuerza de la gravedad (y luego da marcha atrás), la fuerza gravitacional ejercida por toda la materia del universo debería causar la desaceleración de la expansión cósmica. El descubrimiento de que la expansión se acelera en lugar de ralentizarse supone la existencia de algún tipo de «energía oscura» que se

manifiesta como una fuerza que la repele y que en nuestro universo actual supera a la fuerza de atracción de la gravedad. Los físicos continúan esforzándose por entender el origen y la naturaleza de dicha «energía oscura». Una teoría propone que esta energía está relacionada con algún campo mecánico cuántico que impregna el cosmos, semejante al familiar campo electromagnético. A este campo se le ha apodado «quintaesencia», tomando prestado el término del medio invisible de Aristóteles. Curiosamente, en la película de ciencia-ficción dirigida por Luc Besson en 1997, *El quinto elemento*, el «quinto elemento» del título hacía referencia a la propia fuerza de la vida, aquella que da vida a lo inanimado.

La teoría de Platón era mucho más que una simple relación simbólica. Se percató de que las caras de los cuatro primeros sólidos podrían construirse a partir de dos tipos de triángulos rectángulos, el isósceles 45º-90º-45º y el de 30º-90º-60º. Platón explica cómo podían describirse «reacciones químicas básicas» utilizando estas propiedades. Por ejemplo, en la «química» de Platón, cuando se calienta el agua con fuego, ésta produce dos partículas de vapor (aire) y una partícula de fuego. En la formulación de una reacción química se escribiría así:

$$\{\text{agua}\} \rightarrow 2\{\text{aire}\} + \{\text{fuego}\}$$

o, al sopesar el número de caras utilizadas (en los sólidos platónicos que representan estos elementos, respectivamente): $20 = 2 \times 8 + 4$. Aunque es evidente que esta descripción no se ajusta a lo que entendemos por la estructura de la materia, la idea principal (que las partículas fundamentales de nuestro universo y el modo en que

interactúan pueden describirse con una teoría matemática que posee ciertas simetrías) es uno de los pilares de la actual investigación de la física de partículas.

Para Platón, lo que importa no son los complejos fenómenos que observamos en el universo, sino lo verdaderamente fundamental son las simetrías subyacentes, y éstas nunca cambian. Este punto de vista se corresponde con el pensamiento moderno sobre las leyes de la naturaleza. Por ejemplo, estas leyes no cambian según el lugar del universo y, por esta razón, podemos utilizar las mismas leyes que determinemos desde los experimentos en laboratorios tanto si estamos estudiando un átomo de hidrógeno en la Tierra o a miles de millones de años luz de distancia. Esta simetría de las leyes de la naturaleza se manifiesta mediante la conservación de la cantidad que denominamos *momento lineal* (al igualar el producto de la masa de un objeto y la velocidad, y al tener la dirección del movimiento), es decir, tiene el mismo valor tanto si la medimos hoy como dentro de un año. Del mismo modo, dado que las leyes de la naturaleza no cambian con el transcurso del tiempo, se conserva la cantidad que llamamos energía. No podemos obtener energía de la nada. Por tanto, las teorías modernas, basadas en las simetrías y en las leyes de conservación, son en realidad platónicas.

La fascinación de los pitagóricos por los poliedros podría haberse originado a partir de las observaciones de los cristales de pirita en el sur de Italia, donde se situaba la escuela pitagórica. A menudo las piritas, más conocidas como el oro del loco, poseen cristales en forma de dodecaedro. Sin embargo, los sólidos platónicos, su belleza y sus propiedades matemáticas, siguen cautivando la imaginación de la gente siglos después de Platón,

encontrándose en los lugares más inesperados. Por ejemplo, en la novela de ciencia-ficción de Cyrano de Bergerac (1619-1655) *Voyage dans la lune: l'autre monde ou les états et empires de la lune*, el autor utiliza una máquina voladora con forma de icosaedro para escapar de su prisión en lo alto de una torre y aterrizar en una mancha solar.

La Proporción Áurea, Φ, juega un papel decisivo en las dimensiones y en las propiedades simétricas de algunos sólidos platónicos. En concreto, un dodecaedro con una longitud de la arista (el segmento en el que se unen dos caras) de una unidad tiene un área total de $15\phi/\sqrt{3-\phi}$ y un volumen de $5\Phi^3/(6 - 2\Phi)$. Del mismo modo, un icosaedro con una longitud de la arista de una unidad tiene un volumen de $5\Phi^5/6$.

La simetría de los sólidos platónicos nos lleva a otras propiedades interesantes. Por ejemplo, el cubo y el octaedro tienen el mismo número de aristas (doce), pero su número de caras y vértices son intercambiables (el cubo tiene seis caras y ocho vértices y el octaedro ocho caras y seis vértices). Lo mismo ocurre entre el dodecaedro y el icosaedro; ambos tienen treinta aristas, pero el dodecaedro tiene doce caras y veinte vértices, mientras que el icosaedro lo mismo pero al revés. Estas similitudes en las simetrías de los sólidos platónicos nos permiten trazar unos esquemas interesantes de un sólido dentro de su sólido dual o recíproco. Si conectamos los centros de todas las caras de un cubo, obtendremos un octaedro (figura 21), mientras que si conectamos los centros de las caras de un octaedro, obtendremos un cubo. El mismo procedimiento se puede aplicar al trazar un icosaedro dentro de un dodecaedro y viceversa, y la proporción que se obtiene de las longitudes de la arista de ambos sólidos (uno dentro del otro) puede

expresarse en los términos de la Proporción Áurea como $\Phi^2/\sqrt{5}$. El tetraedro es auto-recíproco: al unir los cuatro centros de las caras de un tetraedro se obtiene otro tetraedro.

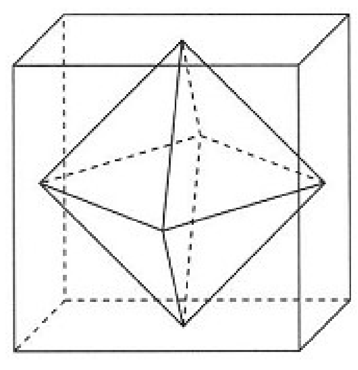


FIGURA 21

Aunque en la antigüedad no se conocían todas las propiedades de los sólidos platónicos, tanto Platón como sus seguidores se percataron de su belleza absoluta. Hasta cierto punto, incluso las dificultades iniciales para construir estas figuras (hasta que se hallaron los métodos que utilizaban la Proporción Áurea) se podían considerar parte de sus atributos. De hecho, la última frase de *Hippias Mayor* reza: «todo lo bello es difícil». El historiador griego Plutarco (circa 46-circa 120) en *Sobre las equivocaciones de los Oráculos* escribe: «Una pirámide (un tetraedro), un octaedro, un icosaedro y un dodecaedro, las figuras primarias que describe Platón, son todas ellas bellas por las simetrías, las equivalencias y sus relaciones, y no queda nada superior o igual a éstas en la Naturaleza para que la componga y la ensamble».

Como he comentado antes, el icosaedro y el dodecaedro están íntimamente ligados a la Proporción Áurea en más de un sentido. Por ejemplo, los doce vértices de un icosaedro pueden dividirse en tres grupos de cuatro cada uno, con los vértices de cada uno de los grupos tocando

las esquinas de un *Rectángulo Áureo* (un rectángulo en que la proporción de la longitud respecto a la anchura está en Proporción Áurea). Los rectángulos son perpendiculares entre sí, teniendo como punto común el centro del icosaedro (figura 22). Del mismo modo, los centros de las doce caras pentagonales del dodecaedro pueden dividirse en tres grupos de cuatro, y cada uno de esos grupos también forma un Rectángulo Áureo.

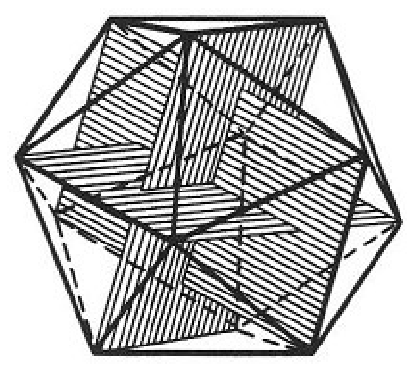


FIGURA 22

Las relaciones directas con la Proporción Áurea entre algunas figuras planas, como el pentágono y el pentagrama, y algunos sólidos, como los sólidos platónicos, nos conduce irremediablemente a la conclusión de que, probablemente, el interés griego por la Proporción Áurea comenzó con los intentos de construir dichas figuras planas y los sólidos. La mayor parte de este trabajo matemático se llevó a cabo a principios del siglo IV a.C. Sin embargo, existen muchas teorías que afirman que la Proporción Áurea se encuentra en el diseño arquitectónico del Partenón, construido y decorado entre el 447 y el 432 a.C., con Pericles en el poder. ¿Pueden verificarse estas teorías?

EL LUGAR DE LA VIRGEN

El Partenón (en griego «lugar de la virgen») fue construido en la Acrópolis de Atenas como templo sagrado dedicado a Athena Parthenos (Atenea la Virgen). Los arquitectos fueron Ictinos y Calícrates, y Fidias, y sus ayudantes y alumnos, se encargaron de la supervisión de las esculturas. Grupos escultóricos adornaban los frontones hasta el techo a lo largo de todo el lado este y oeste. Un grupo retrataba el nacimiento de Atenea y el otro la disputa entre Atenea y Poseidón.

A pesar de su simplicidad engañosa, el Partenón sigue siendo una de las mejores expresiones arquitectónicas del ideal de claridad y de unidad. El 26 de septiembre de 1687, la artillería veneciana bombardeó el Partenón durante un ataque contra los turcos otomanos que ocupaban Atenas y que utilizaban el Partenón como polvorín. Aunque los daños fueron considerables, la estructura básica permaneció intacta. El General Königsmark, que acompañaba al mariscal de campo, nos lo describe así: «¡Cómo apenaba a Su Excelencia destruir el bello templo que había existido durante tres mil años!» Se han producido muchos intentos, en especial desde el final de la ocupación turca (en 1830), por descubrir algún tipo de base geométrica o matemática supuestamente utilizada para conseguir el alto nivel de perfección en el diseño del Partenón. Muchos libros sobre la Proporción Áurea afirman que las dimensiones del Partenón, cuando su frontón triangular permanecía aún intacto, encajaban perfectamente en el Rectángulo Áureo. Esta afirmación suele acompañarse de un dibujo similar al de la figura 23. La Proporción Áurea parece encontrarse también en otras dimensiones del Partenón. Por ejemplo, en una de las obras más extensas sobre la Proporción Áurea, *Der Goldne Schnitt* (La sección áurea, publicada en 1884), Adolph Zeising afirma que la altura de la fachada desde lo

alto de su tímpano hasta el final del pedestal bajo las columnas, también se divide, en Proporción Áurea, por el alto de las columnas.

Esta teoría se repite en muchos libros, como en el influyente *Le Nombre d'or* (El número áureo; aparecido en 1931) de Matila Ghyka. Otros autores, como Miloutine Borissavlievitch en *The Golden Number and the Scientific Aesthetics of Architecture* (1958), aunque no niegan la presencia de Φ en el diseño del Partenón, proponen que el templo debe su armonía y belleza más bien al ritmo regular introducido por la repetición de la misma columna (un concepto denominado «ley del Mismo»).



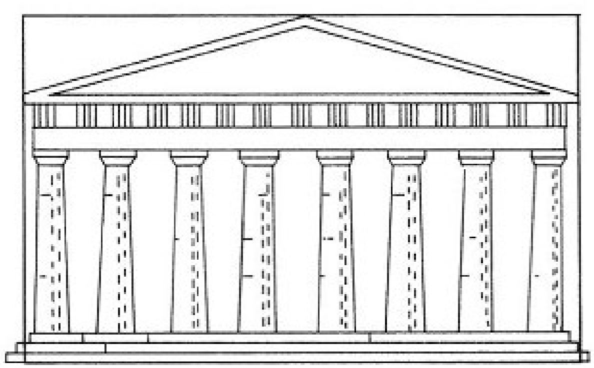


FIGURA 23

La aparición de la Proporción Áurea en el Partenón fue seriamente cuestionada por el matemático de la Universidad de Maine George Markowsky en un artículo publicado en 1992 en el *College Mathematical Journal* titulado «Misconceptions about the Golden Ratio». En primer lugar, Markowsky señala que, invariablemente, partes del Partenón (por ejemplo, las aristas del pedestal, figura 23), se escapan del trazado del Rectángulo Áureo, algo totalmente ignorado por los entusiastas de la Proporción Áurea. Más aún, las dimensiones del Partenón varían según la fuente consultada, seguramente porque se han usado puntos de referencia diferentes en las medidas. He aquí, entonces, otro ejemplo de la oportunidad que nos brindan las afirmaciones basadas sólo en la medición de dimensiones para hacer malabarismos con los números. No estoy convencido de que el Partenón tenga algo que ver con la Proporción Áurea si utilizamos los números citados por Marvin Trachtenberg e Isabelle Hyman en su obra *Architecture: From Prehistory to Post-Modernism* (1985). Estos autores le otorgan una altura de 45 pies y 1 pulgada y una anchura de 101 pies y 3, 75 pulgadas. Estas dimensiones dan una proporción de la anchura/altura de aproximadamente 2,25, lejos de la de 1,618... de la Proporción Áurea. Markowsky señala que aunque tomáramos la altura del vértice por encima del pedestal sobre el que se erigen las columnas (según Stuart Rossiter, de unos 59 pies, como señala en su libro *Greece*, publicado en 1977), obtendríamos una proporción de la anchura/altura de unos 1, 72, más cerca de Φ, pero aún significativamente diferente de su valor. Otros investigadores son también escépticos en cuanto al papel de phi en el diseño del Partenón. Christine Flon afirma en *The World Atlas of Architecture* (1984) que aunque «resulte probable que a

algunos arquitectos… les hubiera gustado basar sus obras en un estricto sistema de proporciones… sería un error generalizar».

¿Se utilizó la Proporción Áurea en el diseño del Partenón? Es difícil afirmarlo con total seguridad. Aunque la mayoría de los teoremas matemáticos en lo que se refiere a la Proporción Áurea (o «proporción media y extrema») parece ser que fueron formulados después de que se construyera el Partenón, entre los pitagóricos sí que existía un conocimiento considerable de ello con anterioridad. Por tanto, es posible que los arquitectos del Partenón decidieran basar su diseño en alguna idea dominante de algún canon estético. Sin embargo, no hay ninguna certeza de ello, como a algunos libros les gustaría hacernos creer, y carece del apoyo de las dimensiones reales del Partenón.

Tanto si aparece como si no la Proporción Áurea en el Partenón, lo que queda claro es que cualesquiera que fueran los «programas» matemáticos instituidos por los griegos en el siglo IV a.C. que se referían a la Proporción Áurea, éstos culminaron con la publicación de los *Elementos* de Euclides hacia el 300 a.C. Desde una perspectiva lógica y rigurosa, se creyó durante mucho tiempo que *Elementos* fue la apoteosis de la convicción en el conocimiento humano.

PROPORCIÓN MEDIA Y EXTREMA

En el año 336 a.C. llegó al trono Alejandro (Magno) de Macedonia a los veinte años. Tras una serie de victorias espectaculares, Alejandro conquistó la mayor parte de Asia Menor, Siria, Egipto y Babilonia, haciéndose con el Imperio Persa. Pocos años antes de su prematura muerte a la edad de treinta y tres, fundó lo que llegaría a convertirse en el mayor monumento a su nombre: la ciudad de Alejandría, cerca de la desembocadura del Nilo.

Alejandría se encontraba en el cruce de tres grandes civilizaciones: la egipcia, la griega y la hebrea. Por consiguiente, se convirtió durante siglos en un centro intelectual extraordinario, así como en el lugar de nacimiento de increíbles logros, como el Septuaginto (la traducción de los 70), la traducción al griego del Antiguo Testamento que suele atribuirse a setenta y dos traductores. Dicha traducción se inició en siglo III a.C. y se terminó un siglo después tras varias etapas.

Tras la muerte de Alejandro, Tolomeo I se hizo con el control de Egipto y de los dominios africanos en el 306 a.C., y entre sus primeras acciones se encuentra la creación del equivalente a una universidad (conocida como el Museo) en Alejandría. Dicha institución constaba de una biblioteca que, tras un inmenso esfuerzo de recopilación, reunió unas 700.000 obras (algunas confiscadas a desafortunados turistas). El primer grupo de profesores de la escuela de Alejandría incluía a Euclides, el autor del libro más conocido de la historia de las matemáticas: *Elementos* (*Stoichia*). A pesar de ser un autor «súper ventas» (sólo la Biblia llegó a vender más libros que los *Elementos* hasta el siglo XX), apenas sabemos nada de su vida, ni siquiera dónde nació. Teniendo en cuenta los contenidos de *Elementos*, es muy posible que Euclides estudiara matemáticas en Atenas junto con otros estudiantes de Platón. Proclo cuenta que «este hombre vivió en la época del primer Tolomeo… por tanto es más joven que los discípulos de Platón, pero mayor que Eratóstenes y Arquímedes».

Los *Elementos*, que consta de trece volúmenes que versan sobre geometría y teoría numérica, es una obra de un alcance tan inmenso que a veces se tiende a olvidar que Euclides fue el autor de, al menos, una docena más de libros,

desde obras sobre música o mecánica hasta óptica. Sólo cuatro de dichos tratados han sobrevivido hasta nuestras días: *División de las figuras*, *Óptica*, *Fenómenos* y *Datos*. *Óptica* contiene algunos de los primeros estudios sobre la perspectiva.

Pocos estarán en desacuerdo en afirmar que los *Elementos* es el mayor y más influyente libro de texto matemático escrito jamás. Se dice que cuando Abraham Lincoln quiso entender el verdadero significado de «prueba» en la profesión legal, empezó a estudiar los *Elementos* en su cabaña de Kentucky. Bertrand Russell, famoso lógico y filósofo británico, nos describe en su *Autobiografía* su primer encuentro con los *Elementos* de Euclides (¡a la edad de once años!) como «uno de los mayores acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor».

Del autor se puede deducir por las páginas de los *Elementos*, que era un hombre concienzudo, respetuoso con la tradición y muy modesto. En ningún pasaje pretende atribuirse algo que no fuera originariamente suyo. De hecho, no reclama ningún tipo de originalidad, a pesar de que es bastante obvio que aportó muchas pruebas nuevas, reorganizó los contenidos de otros autores en volúmenes enteros y diseñó toda la obra. La escrupulosa sinceridad de Euclides y su modestia se ganaron la admiración de Pappo de Alejandría, quien en 340 d.C. compuso una obra de ocho volúmenes titulada *Colección* (*Sinagoga*), una valiosa recopilación de muchos aspectos de las matemáticas griegas.

En los *Elementos*, Euclides intentó abarcar la mayor parte del conocimiento matemático de su época. Los Libros del I al VI analizan la geometría sencilla que aprendemos en la escuela y que lleva el nombre de Euclides (geometría euclidiana). De estos Libros, el I, II, IV y VI tratan de las

líneas y las figuras planas, mientras que el Libro III presenta teoremas relacionados con el círculo, y el V ofrece un extenso recuento de la obra originaria de Eudoxo de Cnido (circa 408-335 a.C.). En los Libros del VII al X se discute la teoría numérica y los orígenes de la aritmética. En concreto, en el Libro X, cuyo contenido pertenece en su mayoría a la obra de Teateto, se explican detalladamente los números irracionales. El Libro XI nos da las bases para la geometría sólida; el Libro XII (en su mayor parte una descripción de la obra de Eudoxo) demuestra el teorema del área del círculo, y el Libro XIII (en deuda con Teateto) demuestra la construcción de los cinco sólidos platónicos.

Ya en la Antigüedad, Hero (siglo I d.C.), Pappo (siglo IV) y Proclo (siglo V), en Alejandría, y Simplicio de Atenas (siglo VI), escribieron comentarios a los *Elementos*. En el siglo IV d.C. apareció una nueva revisión del texto por parte de Teón de Alejandría, que sirvió de base para todas las traducciones hasta el siglo XIX, cuando se descubrió en el Vaticano un manuscrito que contenía un texto algo diferente. En la Edad Media, se tradujo los *Elementos* al árabe tres veces. La primera de estas traducciones fue llevada a cabo por al-Hajjāj ibn Yūsuf ibn Maṭar a petición del califa Hārūn ar-Rashīd (que gobernó del 786-809), conocido entre nosotros por los cuentos de *Las mil y una noches*. En Europa Occidental los *Elementos* llegaron por primera vez a través de sus traducciones latinas de las versiones árabes. El monje benedictino inglés Adelard de Bath (circa 1070-1145), que según se cuenta viajó por España disfrazado de estudiante musulmán, se hizo con un texto árabe y completó la traducción al latín alrededor del año 1120. Dicha traducción se convirtió en la base para todas las ediciones europeas hasta el siglo XVI. Después vinieron las traducciones en lenguas modernas.

Aunque puede que Euclides no sea el mayor matemático que haya existido, fue sin duda el mejor profesor de matemáticas. El mismo libro de texto que escribió, se utilizó durante más de dos mil años, hasta mediados del siglo XIX. Hasta el detective Sherlock Holmes, en *Un estudio en escarlata* de Arthur Conan Doyle, afirma que sus conclusiones, logradas por el método deductivo, son «tan infalibles como muchas de las propuestas de Euclides».

La Proporción Áurea aparece en varios pasajes de los *Elementos*. La primera definición de la Proporción Áurea (proporción media y extrema) en lo que se refiere al área, aparece indirectamente en el Libro II. En el Libro VI encontramos una segunda definición más clara respecto a la proporción. Aquí Euclides utiliza la Proporción Áurea en la construcción del pentágono (Libro IV) y más adelante en la construcción del icosaedro y el dodecaedro (Libro XIII).



FIGURA 24

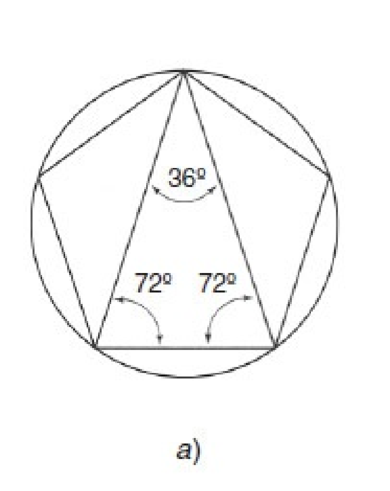
Permítanme utilizar la geometría sencilla para examinar la definición de Euclides y así explicar por qué la Proporción Áurea es tan importante para la construcción del pentágono. En la figura 24 la línea *AB* se divide por el punto *C*. La definición de Euclides de proporción media y extrema en el Libro VI es: (segmento mayor)/(segmento menor) es igual a (toda la línea/segmento mayor). Es decir, en la figura 24:

$$AC/CB = AB/AC.$$

¿Qué tiene que ver esta división de la línea con el pentágono? En cualquier figura plana (aquellas cuyos lados y ángulos interiores son iguales, conocidas como *polígonos* regulares), la suma de todos los ángulos interiores es dada por 180 $(n - 2)$, donde n es el número de lados. Por ejemplo, en un triángulo $n = 3$, la suma de todos sus ángulos

es igual a 180 grados. En un pentágono *n* = 5, la suma de todos sus ángulos es igual a 540 grados. Por lo tanto, cada ángulo del pentágono es igual a 540/5 = 108 grados.

Imaginen ahora que dibujamos dos diagonales adyacentes en el pentágono, como en la figura 25a, formando tres triángulos isósceles (con dos lados iguales). Como los dos ángulos cerca de la base de un triángulo isósceles son iguales, los ángulos base de los lados de los dos triángulos son de 36 grados cada uno [mitad de (180º – 108º)]. Por tanto, obtendremos para los ángulos del triángulo medio los valores 36-72-72 (como se indica en la figura 25a). Si bisecamos uno de los dos ángulos de la base de 72º (como en la figura 25b), obtenemos un triángulo menor *DBC* con los mismos ángulos (36-72-72) que el mayor *ADB*. Utilizando geometría muy elemental, podemos demostrar que, según la definición de Euclides, el punto *C* divide la línea *AB* precisamente en Proporción Áurea. En consecuencia, la proporción de *AD* a *DB* también es igual a la Proporción Áurea. (Se ofrece una pequeña demostración en el apéndice 4). En otras palabras, en un pentágono regular la proporción de la diagonal al lado es igual a Φ. Este hecho ejemplifica que la habilidad para construir una línea dividida por la Proporción Áurea proporciona a su vez un medio sencillo para construir un pentágono regular. La construcción del pentágono fue la principal razón del interés griego en la Proporción Áurea. El triángulo central de la figura 25a, con una proporción entre el lado y la base de 1/ Φ, se conoce como el *Triángulo Áureo;* los dos triángulos de los lados, con una proporción entre el lado y la base de 1/Φ se conocen en ocasiones como *Gnomons Áureos*. La figura 25b demuestra una propiedad única de los *Triángulos Áureos* y los *Gnomons Áureos*: pueden diseccionarse en triángulos, que también son *Triángulos Áureos* y *Gnomons Áureos*.



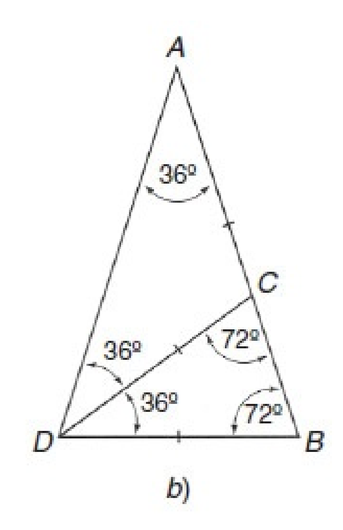


FIGURA 25

La relación de la Proporción Áurea con el pentágono, la simetría quintuplicada y los sólidos platónicos, es interesante por sí misma, y desde luego fue suficiente para encender la curiosidad de los antiguos griegos. La fascinación pitagórica por el pentágono y el pentagrama, unida al interés de Platón por los sólidos regulares y su creencia de que representaban las entidades cósmicas fundamentales, llevó a generaciones de matemáticos a trabajar en la formulación de numerosos teoremas sobre Φ. Sin embargo, la Proporción Áurea no hubiera alcanzado el estatus casi reverencial que alcanzó de no ser por algunas de sus verdaderamente únicas propiedades algebraicas. Para poder entender estas propiedades antes debemos encontrar el valor preciso de Φ.

Examinemos de nuevo la figura 24 y consideremos la longitud del segmento menor, *CB*, como una unidad, y la longitud del mayor, *AC*, como *x* unidades. Si la proporción de *x* a 1 es la misma que la de *x* + 1 (longitud de la línea *AB*) a *x*, entonces la línea ha sido dividida en proporción media y

extrema. Podemos resolver fácilmente el valor, x, de la Proporción Áurea. De la definición de proporción media y extrema

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

Multiplicando ambos lados por x, obtenemos $x^2 = x + 1$, o la simple ecuación cuadrática

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Por si acaso no recuerdan cómo resolver ecuaciones cuadráticas, el apéndice 5 les ofrece un breve recordatorio. Las dos soluciones para la ecuación de la Proporción Áurea son:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La solución positiva $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}6180339887\ldots$ nos da el valor de la Proporción Áurea. Ahora vemos claramente que Φ es irracional, ya que simplemente es la mitad de la suma de 1 y la raíz cuadrada de 5. Incluso antes de seguir adelante, podemos tener la sensación de que este número tiene algunas propiedades interesantes si utilizamos una calculadora científica de bolsillo. Introduzca el número 1,6180339887 y presione la tecla $\{x^2\}$. ¿Le sorprende algo? Ahora introduzca de nuevo el número, y en esta ocasión presione la tecla $\{1/x\}$. ¿Inquietante, verdad? Mientras que el cuadrado del número 1,6180339887… da 2,6180339887…, su recíproco (uno sobre) da 0,6180339887… ¡todos con los mismos decimales después de la coma! La Proporción Áurea

tiene las propiedades únicas de obtener su cuadrado añadiendo simplemente el número 1, y su recíproco al substraer el número 1. Además, curiosamente, la solución negativa a la ecuación $x2 = (1 - \sqrt{5})/2$ es exactamente igual a la negativa de 1/Φ.

Paul S. Bruckman, de Concord (California), publicó en 1977 en la revista *The Fibonacci Quarterly* un divertido poema titulado «Constantly Mean.»[1] Refiriéndose a la Proporción Áurea como la «Media Áurea», el primer verso del poema dice así:

La media áurea es bastante absurda;
No es la simple sorda.
Si la inviertes (¡qué divertido!),
Será la misma, menos uno;
Pero si la aumentas por una unidad,
Da prioridad a su cuadrado, alejadla de mí.

El que ahora dispongamos de una expresión algebraica para la Proporción Áurea nos permite, en principio, calcularla con gran precisión. Esto es lo que hizo en 1966 M. Berg cuando empleó 20 minutos en un ordenador central IBM 1401 para calcular Φ hasta el decimal 4.599. (El resultado se publicó en *The Fibonacci Quarterly*). Hoy en día puede lograrse lo mismo con un ordenador personal en menos de dos segundos. De hecho la Proporción Áurea se calculó hasta su decimal número 10 millones en diciembre de 1996, y se tardó unos treinta minutos. Para los auténticos entusiastas de los números, ver Φ hasta su decimal 2.000 en la página siguiente.

Aunque resulten inquietantes, el lector debe de estar pensando que las propiedades de Φ que he descrito hasta ahora apenas justifican adjetivos tales como «áureo» o

«divino»; y tiene razón. Sin embargo, esto no ha sido más que un primer vistazo a las maravillas que están por llegar.

										Lugar decimal
1,61803	39887	49894	84820	45868	34365	63811	77203	09179	80576	50
28621	35448	62270	52604	62818	90244	97072	07204	18939	11374	100
84754	08807	53868	91752	12663	38622	23536	93179	31800	60766	
72635	44333	89086	59593	95829	05638	32266	13199	28290	26788	200
06752	08766	89250	17116	96207	03222	10432	16269	54862	62963	
13614	43814	97587	01220	34080	58879	54454	74924	61856	95364	300
86444	92410	44320	77134	49470	49565	84678	85098	74339	44221	
25448	77066	47809	15884	60749	98871	24007	65217	05751	79788	400
34166	25624	94075	89069	70400	02812	10427	62177	11177	78053	
15317	14101	17046	66599	14669	79873	17613	56006	70874	80710	500
13179	52368	94275	21948	43530	56783	00228	78569	97829	77834	
78458	78228	91109	76250	03026	96156	17002	50464	33824	37764	
86102	83831	26833	03724	29267	52631	16533	92473	16711	12115	
88186	38513	31620	38400	52221	65791	28667	52946	54906	81131	
71599	34323	59734	94985	09040	94762	13222	98101	72610	70596	
11645	62990	98162	90555	20852	47903	52406	02017	27997	47175	
34277	75927	78625	61943	20827	50513	12181	56285	51222	48093	
94712	34145	17022	37358	05772	78616	00868	83829	52304	59264	
78780	17889	92199	02707	76903	89532	19681	98615	14378	03149	
97411	06926	08867	42962	26757	56052	31727	77520	35361	39362	1.000
10767	38937	64556	06060	59216	58946	67595	51900	40055	59089	
50229	53094	23124	82355	21221	24154	44006	47034	05657	34797	
66397	23949	49946	58457	88730	39623	09037	50339	93856	21024	
23690	25138	68041	45779	95698	12244	57471	78034	17312	64532	
20416	39723	21340	44449	48730	23154	17676	89375	21030	68737	
88034	41700	93954	40962	79558	98678	72320	95124	26893	55730	
97045	09595	68440	17555	19881	92180	20640	52905	51893	49475	
92600	73485	22821	01088	19464	45442	22318	89131	92946	89622	
00230	14437	70269	92300	78030	85261	18075	45192	88770	50210	
96842	49362	71359	25187	60777	88466	58361	50238	91349	33331	
22310	53392	32136	24319	26372	89106	70503	39928	22652	63556	
20902	97986	42472	75977	25655	08615	48754	35748	26471	81414	
51270	00602	38901	62077	73224	49943	53088	99909	50168	03281	
12194	32048	19643	87675	86331	47985	71911	39781	53978	07476	
15077	22117	50826	94586	39320	45652	09896	98555	67814	10696	
83728	84058	74610	33781	05444	39094	36835	83581	38113	11689	
93855	57697	54841	49144	53415	09129	54070	05019	47754	86163	
07542	26417	29394	68036	73198	05861	83391	83285	99130	39607	
20144	55950	44977	92120	76124	78564	59161	60837	05949	87860	
06970	18940	98864	00764	43617	09334	17270	91914	33650	13715	2.000

MÚLTIPLES SORPRESAS

Todo el mundo ha experimentado alguna vez la sensación de reconocer de repente un rostro familiar en una fiesta donde estábamos convencidos de que apenas conoceríamos a alguien. Posiblemente reaccionaremos de modo similar cuando, en una exposición de arte, al doblar la esquina, nos hallemos de pronto ante una de nuestras pinturas favoritas. De hecho, la idea de una «fiesta sorpresa» se basa en el placer y la gratificación que muchos sentimos cuando nos topamos ante una aparición que no esperábamos. Las matemáticas y la Proporción Áurea en concreto nos ofrecen una amplia gama de sorpresas similares.

Imaginen que estamos tratando de determinar el valor de la siguiente expresión inusual que comprende una serie de raíces cuadradas interminables:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

¿Cómo lo haríamos para encontrar la respuesta? Un modo más bien torpe de empezar podría consistir en calcular $\sqrt{1+\sqrt{1}}$ (que es $\sqrt{2}$ = 1,414…), entonces calcular $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, y así sucesivamente, con la esperanza de que los valores siguientes converjan en algún número. Pero pueden darse métodos de cálculo más cortos y elegantes. Supongamos que denominamos x al valor que buscamos. Por tanto tendremos:

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Ahora hagamos el cuadrado de ambos lados de esta ecuación. El cuadrado de x es x^2, y el cuadrado de la expresión del lado derecho simplemente elimina la primera

de las raíces cuadradas (por la definición de la raíz cuadrada). Por tanto, obtenemos

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

Sin embargo, nótese que debido a que la segunda expresión del lado derecho es infinita, en realidad es igual a nuestro original x. Por tanto, obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 = 1 + x$. ¡Pero si ésta es exactamente la ecuación que define la Proporción Áurea! Por tanto descubrimos que nuestra expresión sin fin es en realidad igual a Φ.

Observemos ahora un tipo muy diferente de expresión interminable, esta vez con fracciones:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}.$$

Éste es un caso especial de entidades matemáticas conocidas como fracciones continuas, que se utilizan con bastante frecuencia en la teoría numérica. ¿Cómo calcularíamos el valor de esta fracción continua? Podríamos de nuevo truncar las series de unos en puntos cada vez más altos, con la esperanza de encontrar el límite en el que la fracción continua converge. Sin embargo, si nos basamos en nuestra experiencia anterior, podríamos al menos empezar por indicar el valor de x. Por tanto,

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}.$$

Nótese que debido a que la fracción continua es interminable, el *denominador* del segundo término en el lado derecho es, de hecho, idéntico a x. Por tanto, tenemos la ecuación

$$x = \frac{1}{x}.$$

Multiplicando ambos lados por x, obtenemos $x^2 = x + 1$, ¡de nuevo la ecuación que define la Proporción Áurea! Descubrimos que esta notable fracción continua también es igual Φ. El poema de Paul S. Bruckman *Constantly Mean* también se refiere a esta propiedad:

Expresada como una fracción continua,
Es uno, uno, uno… sin fin;
Resumiendo, la más sencilla de todas
(¿No te parece esto realmente alucinante?)

Debido a que la fracción continua correspondiente a la Proporción Áurea se compone sólo de unos, converge muy lentamente. La Proporción Áurea es, en este sentido, «más difícil» de expresar como una fracción que como cualquier otro número irracional: el «más irracional» de todos los irracionales.

De las expresiones interminables, dirijamos nuestra atención ahora hacia el Rectángulo Áureo de la figura 26. Las longitudes de los lados del rectángulo están en Proporción Áurea unas con otras. Supongamos que seccionamos un cuadrado de este rectángulo (como se indica en la figura). Nos quedaremos con un rectángulo menor que también es un Rectángulo Áureo. Las dimensiones del rectángulo «hija» son menores que las del rectángulo «madre», precisamente por el factor Φ. Podemos ahora cortar un cuadrado del Rectángulo Áureo «hija» y

obtendremos de nuevo un Rectángulo Áureo, las dimensiones del cual son menores por otro factor de Φ. Si continuamos con este proceso hasta el infinito, produciremos Rectángulos Áureos cada vez menores (cada vez con dimensiones «desinfladas» por un factor Φ). Si examináramos con una lupa potente los rectángulos que decrecen (en tamaño), todos parecerían idénticos. El Rectángulo Áureo es el *único* rectángulo con la propiedad de que al seccionar un cuadrado produce un rectángulo similar. Dibuje dos diagonales de cualquier par de rectángulos madre-hija de la serie, como en la figura 26, y todos se conectarán en el mismo punto. La serie de rectángulos disminuyendo continuamente converge en ese punto inalcanzable. Debido a las propiedades «divinas» atribuidas a la Proporción Áurea, el matemático Clifford A. Pickover sugirió que deberíamos referirnos a ese punto como «el Ojo de Dios».

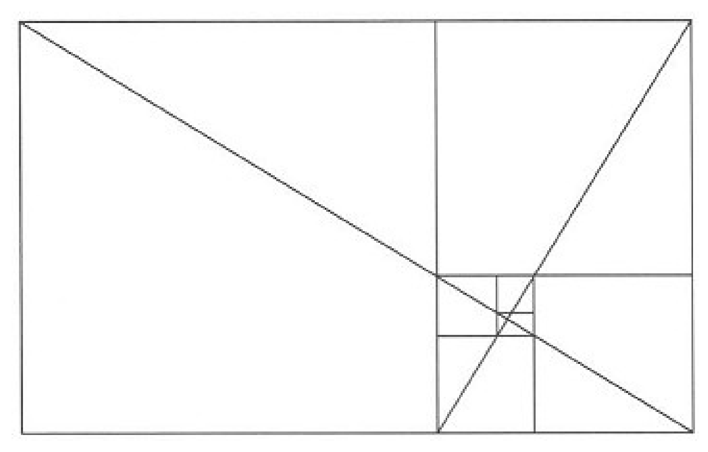


FIGURA 26

Si no encuentra alucinante que todas estas diferentes circunstancias matemáticas lleven a Φ, coja una simple calculadora de bolsillo y le mostraré un truco de magia increíble. Escoja dos números cualesquiera (con cualquier número de dígitos) y escríbalos uno detrás del otro. Ahora,

utilizando la calculadora (en su cabeza), forme un tercer número sumando simplemente los dos primeros y escríbalo; forme un cuarto número sumando el segundo número al tercero; un quinto número sumando el tercero al cuarto; un sexto número sumando el cuarto al quinto, y así sucesivamente hasta que tenga una serie de veinte números. Por ejemplo, si sus dos primeros números son el 2 y el 5, habría obtenido la serie 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131… Ahora utilice la calculadora para dividir el vigésimo número por el decimonoveno. ¿Le resulta familiar? Por supuesto, es el número phi. Volveré sobre este truco y su explicación en el capítulo 5.

HACIA LA EDAD OSCURA

En su definición de los *Elementos*, a Euclides le interesaba ante todo la interpretación geométrica de la Proporción Áurea y su utilización en la construcción del pentágono y en algunos de los sólidos platónicos. Siguiendo sus pasos, los matemáticos griegos posteriores produjeron nuevos y variados resultados geométricos sobre la Proporción Áurea. Por ejemplo, el «Suplemento» a los *Elementos* (a menudo llamado Libro 14) contiene un importante teorema sobre un dodecaedro y un icosaedro circunscritos por la misma esfera. El texto del «Suplemento» se atribuye a Hipsicles de Alejandría, quien probablemente vivió en el siglo II a.C., pero se cree que contiene teoremas de Apolonio de Perga (circa 262-190 a.C.), una de las tres figuras claves (junto a Euclides y Arquímedes) de la Edad de Oro de la matemática griega (desde el 300 al 200 a.C.). A partir de esa época, escasearon los avances por lo que se refiere a la Proporción Áurea y se relacionan principalmente con Hero (siglo I d.C.), Tolomeo (siglo II d.C.) e Pappo (siglo IV). En su *Métrica*, Hero ofreció aproximaciones (a

menudo sin detallar cómo lo había obtenido) de las áreas del pentágono y del decágono (polígono de diez lados) así como los volúmenes del dodecaedro y del icosaedro.

Tolomeo (Claudio Tolomeo) vivió alrededor del 100-179 d.C., pero no conocemos casi nada de su vida, excepto que realizó la mayor parte de su obra en Alejandría. Basándose en observaciones astronómicas propias y anteriores, desarrolló su conocido modelo geocéntrico del universo, según el cual el sol y todos los planetas se mueven alrededor de la tierra. Aunque estaba equivocado en lo fundamental, su modelo consiguió explicar (al menos en un principio) los movimientos observados de los planetas, explicación que continuó determinando el pensamiento astronómico durante los siguientes trece siglos.

Tolomeo sintetizó su propia obra astronómica con la de otros astrónomos griegos (en particular, con la de Hiparco de Nicea) en un libro enciclopédico de trece volúmenes llamado *Heē Mathēmatikē Syntaxis* (La síntesis matemática). La obra fue conocida más tarde como *El gran astrónomo*. Sin embargo, los astrónomos árabes del siglo IX se referían al libro invocando el superlativo griego «Megist*ē*» (el más grande), pero añadiendo un prefijo con el identificativo árabe para los nombres propios, «al». Desde entonces se conoció al libro con el nombre de *Almagest*. Tolomeo también escribió una importante obra sobre geografía, la influyente *Guía a la geografía*.

En el *Almagesto* y en la *Guía a la geografía*, Tolomeo construyó uno de los equivalentes más tempranos de una tabla trigonométrica para muchos ángulos. Concretamente, calculó las longitudes de las cuerdas que conectan dos puntos en un círculo por varios ángulos, incluyendo los

ángulos 36, 72 y 108º, que, como recordará, aparecen en el pentágono y se asocian directamente, por tanto, con la Proporción Áurea.

El último geómetra griego que contribuyó con teoremas relacionados con la Proporción Áurea fue Pappo de Alejandría. En su *Colección* (*Sinagoga;* 340 d.C.), Pappo ofrece un nuevo método para la construcción del dodecaedro y del icosaedro, así como comparaciones de los volúmenes de los sólidos platónicos, todo ello en relación con la Proporción Áurea. El comentario de Pappo sobre la teoría de los números irracionales de Euclides, que también existe en traducciones al árabe, dibuja con gran belleza el desarrollo histórico de los irracionales. Sin embargo, sus esfuerzos heroicos por detener la decadencia general de las matemáticas y de la geometría en particular no tuvieron éxito y, tras su muerte, con la disminución general de la curiosidad intelectual en occidente, el interés por la Proporción Áurea entró en un largo periodo de hibernación. La gran biblioteca de Alejandría fue destruida debido a una serie de ataques: primero, los romanos, y luego, los cristianos y musulmanes. Incluso desapareció la Academia de Platón en el 529 d.C., cuando el emperador bizantino Justiniano ordenó el cierre de todas las escuelas griegas. Durante la deprimente Edad Oscura que siguió a esto, el historiador francés y obispo, Gregorio de Tours (538-594) lamentó que «el estudio de las letras ha muerto entre nosotros». De hecho, el estudio de la ciencia en general se transfirió totalmente a India y al mundo árabe. Un suceso significativo de este periodo son los denominados numerales indo-arábigos y la notación decimal. El matemático hindú más destacado del siglo VI fue Āryabhaṭa (476-circa 550). En su libro más famoso, titulado *Āryabhaṭíya*, encontramos la frase siguiente: «de lugar en lugar cada uno es diez veces el

anterior», lo que indica la aplicación de un sistema valor-lugar. Un plato indio del 595 contiene escritos (de una fecha) en numerales hindúes utilizando la notación decimal de valor-lugar, lo que implica que dichos numerales ya se utilizaban desde hacía tiempo. La primera señal (aunque sin influencia real) de que los numerales hindúes llegaban a occidente, puede encontrarse en los escritos del obispo nestoriano Severus Sebokht, que vivió en Keneshra, en el río Éufrates. En el 662 escribió: «Omitiré toda discusión sobre la ciencia de los indios… y de sus valiosos métodos de cálculo, que son indescriptibles. Tan sólo deseo decir que dicho cálculo se realiza con nueve signos».

Con el surgimiento del Islam, el mundo musulmán se convirtió en un centro importante del estudio matemático. Si no hubiera sido por el auge intelectual del Islam durante el siglo VIII, la mayor parte de las matemáticas antiguas se habrían perdido. En concreto, el califa Al-Mamun (786-833) estableció en Bagdad el Beit al-hikma (Casa de la sabiduría), que operaba de modo similar a la famosa universidad alejandrina o «Museo». El imperio abasida subsumió todas las enseñanzas alejandrinas que habían sobrevivido. Según la tradición, tras tener un sueño en el que se le aparecía Aristóteles, el califa decidió que se tradujeran todas las obras de la antigua Grecia.

Muchas de las importantes contribuciones islámicas fueron algebraicas por naturaleza y tocaban la Proporción Áurea sólo superficialmente. Sin embargo, debe mencionarse por lo menos a tres matemáticos: Al-Khwārizmī Abu Kamil Shuja, en el siglo IX, y Abu'l-Wafa, en el X.

Mohamed ibn-Musa Al-Khwārizmī compuso en Bagdad (alrededor del 825) lo que se considera la obra algebraica más influyente del periodo: *Kitāb al-jabr wa al-muqābalah* (La ciencia de la restauración y la reducción). De este título (al-jabr) deriva la palabra álgebra que utilizamos hoy en día ya que éste fue el primer libro de texto sobre esta materia que se utilizó en Europa. Más aún, la palabra «algoritmo», que se refiere a cualquier método especial de resolución de un problema matemático utilizando un procedimiento exacto de pasos, deriva de una distorsión del nombre de Al-Khwārizmī. *La ciencia de la restauración* fue sinónimo de la teoría de las ecuaciones durante unos cuantos siglos. La ecuación necesaria para resolver uno de los problemas presentados por Al-Khwārizmī se parece mucho a la ecuación que define a la Proporción Áurea. Al-Khwārizmī dice: «He dividido diez en dos partes; he multiplicado una por diez y la otra por sí misma, y los productos son los mismos. Al-Khwārizmī denomina shai (la cosa) a la incógnita. Por tanto, la primera línea de la descripción de la ecuación obtenida (para el problema anterior) se traduce como «multiplica *cosa* por diez; son diez *cosas*». La ecuación que se obtiene, $10x = (10 - x)^2$, es la misma que la del segmento menor de una línea de longitud 10 dividida en Proporción Áurea. La cuestión de si Al-Khwārizmī pensaba realmente en la Proporción Áurea cuando expuso este problema, es un tema en discusión. Bajo la influencia de la obra Al-Khwārizmī, la incógnita se la llamó «res» en las primeras obras algebraicas en latín y se tradujo a «cosa» (la cosa) en italiano. Por tanto, la misma álgebra se conoció como «l’arte della cosa» (el arte de la cosa). En ocasiones, se referían a ello como «ars magna» (el gran arte), para distinguirlo de lo que se consideraba el arte menor de la aritmética.

El segundo matemático árabe que realizó contribuciones relacionadas con la historia de la Proporción Áurea fue Abu Kamil Shuja, conocido como al-Hasib al-Misri, que significa «la calculadora de Egipto». Nació alrededor del 850, probablemente en Egipto, y murió en el 930 aproximadamente. Escribió muchas obras, algunas de las cuales han sobrevivido, incluyendo *Libro sobre álgebra*, *Libro de las cosas extrañas en el arte del cálculo*, *Libro sobre la medición y la geometría*. Puede que Abu Kamil haya sido el primer matemático que en lugar de encontrar simplemente una solución a un problema, se interesara en encontrar *todas* las soluciones posibles. En su *Libro de las cosas extrañas en el arte del cálculo* describe un problema para el que encontró 2.678 soluciones. Lo que es más importante desde el punto de vista de la Proporción Áurea, los libros de Abu Kamil sirvieron de base para algunos de los libros del matemático italiano Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, a quien conoceremos en breve. El tratado de Abu Kamil *Sobre el pentágono y el decágono* contiene veinte problemas y sus soluciones, en los que calcula las áreas de las figuras, y la longitud de sus lados y los radios que las rodean. En algunos de estos cálculos (pero no en todos) utiliza la Proporción Áurea. Algunos problemas que aparecen en *Álgebra* también podrían estar inspirados en el concepto de la Proporción Áurea.

El último de los matemáticos islámicos que me gustaría mencionar es Mohamed Abu'l-Wafa (940-998). Abu'l-Wafa nació en Buzjan (en el actual Irán) y vivió durante la dinastía islámica buyida, en Irán occidental e Irak. Dicha dinastía alcanzó su máximo esplendor bajo el reinado de Ȧdud ad-Dawlah, gran patrón de las matemáticas, las ciencias y las artes. Abu'l-Wafa fue uno de los matemáticos invitados a la corte de Ȧdud ad-Dawlah en Bagdad en el 959. Su

primer gran libro fue *Libro sobre lo que es necesario de la ciencia, de la aritmética para escribas y comerciantes* y, según Abu'l-Wafa «comprende todo lo que un experto o novato, subordinado o jefe de aritmética necesita saber». Curiosamente, aunque Abu'l-Wafa era un experto en el uso de los numerales hindúes, todo el texto de su obra está escrito sin numerales (los números se escriben sólo como palabras y los cálculos se hacen mentalmente). En el siglo X, el uso de los numerales indios todavía no se aplicaba en los círculos de negocios. El interés de Abu'l-Wafa por la Proporción Áurea aparece en su otro libro: *Un libro sobre las construcciones geométricas necesarias para un artesano*. En este libro, Abu'l-Wafa nos presenta ingeniosos métodos para la construcción del pentágono y el decágono, y para inscribir polígonos regulares en circunferencias y dentro de otros polígonos. El componente único de su obra es una serie de problemas que resuelve con la ayuda de una regla y un compás, en los que el ángulo entre los dos brazos del compás se mantiene fijo (lo que se conoce como construcciones del «compás oxidado»). Probablemente, este género en particular fue inspirado por la *Colección* de Pappo, pero también podría representar la respuesta de Abu'l-Wafa a un problema de índole práctica (los resultado con un compás de ángulo fijo son más exactos). La obra de estos y otros matemáticos islámicos produjo un progreso importante, pero sólo cuantitativo, en la historia de la Proporción Áurea. Como sucede a menudo en las ciencias, estos periodos preparatorios de avance lento son necesarios para que nazca la siguiente revolución. El gran dramaturgo George Bernard Shaw expresó su punto de vista sobre el progreso del siguiente modo: «El hombre razonable se adapta al mundo; el que no lo es, insiste en que el mundo se adapte a él. Por tanto, todo el progreso depende del hombre no razonable».

En el caso de la Proporción Áurea, el salto cuantitativo tuvo que esperar a la aparición del más distinguido matemático europeo de la Edad Media: Leonardo de Pisa.

5
HIJO DE BUEN CORAZÓN

Las nueve cifras indias son: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con estas nueve cifras, y con el signo 0… puede escribirse cualquier número, tal y como se demuestra más abajo.

LEONARDO FIBONACCI (circa 1170-1240)

Leonardo de Pisa (en latín Leonardus Pisanus), también conocido como Leonardo Fibonacci, empezó con estas palabras su primer y más conocido libro, *Liber abaci* (Libro del ábaco), publicado en 1202. En la época en que apareció la obra, sólo unos cuantos privilegiados intelectuales europeos interesados en el estudio de la traducción de las obras de Al-Khwārizmī y Abu Kamil conocían los numerales indo-arábigos utilizados en la actualidad. Fibonacci, quien se reunió brevemente con su padre, un oficial de aduanas y comercio, en Bugia (en la actual Argelia) y más tarde viajó a otros países mediterráneos (Grecia, Egipto y Siria, entre otros), tuvo la oportunidad de estudiar y comparar distintos sistemas y métodos numéricos para las operaciones aritméticas. Tras llegar a la conclusión de que los numerales indo-arábigos, que incluían el principio de lugar-valor, eran muy superiores al resto de métodos, dedicó los siete primeros capítulos de su libro a explicaciones sobre la notación indo-arábiga y a su uso en aplicaciones prácticas.

Leonardo Fibonacci nació en la década de los años 70 del siglo XII. Su padre, Guglielmo, era un funcionario y hombre de negocios. Es probable que el apodo Fibonacci (del latín *filius* Bonacci, hijo de la familia Bonacci o «hijo de buen corazón») lo introdujera el historiador de las matemáticas Guillaume Libri en una cita a pie de página de su libro de 1838 *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie* (Historia de las ciencias matemáticas en Italia), aunque

algunos investigadores se lo atribuyen a los matemáticos italianos de finales del siglo XVIII. En algunos manuscritos y documentos, Leonardo se refiere a sí mismo, o se refieren a él, como Leonardo Bigollo (o Leonardi Bigolli Pisani); en los dialectos toscano y veneciano, «Bigollo» significa algo parecido a «un viajero» o un «hombre sin importancia», respectivamente. La Pisa del siglo XII era un puerto de gran actividad donde las mercancías transitaban tanto a través del continente como a través del mar. Las especias del Lejano Oriente circulaban a través de Pisa en su trayecto al norte de Europa, y en el puerto se cruzaban las rutas del vino, el aceite y la sal que suministraban estos productos a las distintas zonas de Italia, Sicilia y Cerdeña. La importante industria peletera pisana importaba piel de cabra del norte de África, por lo que no era extraño ver a curtidores elaborando pieles junto a las orillas del río. La ciudad, situada junto al río Arno, también estaba orgullosa de su excelente industria metalúrgica y naviera. Hoy en día se conoce a Pisa sobre todo por su famosa torre inclinada, y la construcción de este campanario empezó durante la juventud de Fibonacci. Es evidente que todo este frenesí comercial requería enormes registros de inventarios y precios. Seguro que Leonardo pudo presenciar el trabajo de diversos escribas mientras realizaban listas de precios en numerales romanos, sumando cifras con la ayuda de un ábaco. Las operaciones aritméticas con numerales romanos no son muy divertidas. Por ejemplo, para obtener la suma de 3.786 y 3.843, se debe sumar MMMDCCLXXXVI a MMMDCCCXLIII; si piensa que esto es voluminoso, intente multiplicarlos entre sí. De todos modos, dado que los mercaderes medievales realizaban sumas y restas simples, los numerales romanos no les iban del todo mal. El elemento fundamental de que carecían los numerales

romanos era, por supuesto, el sistema de lugar-valor (un número que se escribe como 547 realmente significa $(5 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (7 \times 10^0)$. La Europa occidental superó la falta del principio lugar-valor de su sistema numérico gracias al ábaco. El origen de la palabra «ábaco» puede ser *avaq*, término hebreo que significa polvo, ya que los más antiguos aparatos de cálculo de este tipo no eran más que tablas cubiertas de arena sobre las cuales se trazaban los números. Los ábacos de la época de Fibonacci disponían de contadores que se deslizaban a lo largo de cables. Los diversos cables del ábaco hacían las veces del lugar-valor. Un ábaco estándar tenía cuatro cables: las cuentas del cable inferior representaban las unidades; las del cable siguiente, las decenas; las del tercero, las centenas, y las del cable superior, los millares. Por tanto, y a pesar de que el ábaco ofrecía una solución bastante eficiente para las operaciones aritméticas sencillas (me sorprendió descubrir en una visita a Moscú en 1990 que la cafetería de mi hotel aún utilizaba un ábaco), es evidente que presentaba enormes desventajas al realizar cálculos más complejos. Es imposible plantearse, por ejemplo, manipular los «billones y billones» de Carl Sagan, famoso difusor de la astronomía, con la ayuda de un ábaco.

En Bugia (en la actualidad, Bejaïa), en Argelia, Fibonacci se familiarizó con el arte de los nueve números indios, probablemente, según sus propias palabras, con la «excelente instrucción» de un profesor árabe. Al tiempo que recorría el Mediterráneo para expandir sus horizontes matemáticos, Fibonacci decidió publicar un libro para introducir de un modo más profundo el uso de los numerales indo-arábigos en la vida comercial. En esta obra, Fibonacci expone de modo meticuloso la traducción desde los numerales romanos al nuevo sistema así como las operaciones aritméticas con los nuevos numerales. Fibonacci

ofrece numerosos ejemplos que demuestran la aplicación de sus «nuevas mates» a una variedad de problemas que van desde las prácticas comerciales o el relleno y vaciado de cisternas hasta el movimiento de los barcos. Al principio del libro, Fibonacci añade la siguiente disculpa: «Si por casualidad he omitido algo más o menos adecuado o necesario, les pido disculpas, dado que nadie está libre de cometer errores y muchos son los prudentes en todas las materias».

Son muchos los casos en que Fibonacci ofreció más de una versión del problema, y demostró una asombrosa versatilidad en la elección de diversos métodos para solucionarlos. Además, su álgebra era a menudo retórica, explicando en palabras la solución deseada en lugar de resolver ecuaciones explícitamente, como haríamos hoy en día. A continuación les ofrecemos un hermoso ejemplo de uno de los problemas aparecidos en *Liber abaci* (como fue traducido en el encantador libro de Joseph y Frances Gies, *Leonard of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages*):

> Un hombre que llegaba al final de su vida reunió a sus hijos y les dijo: «Dividid mi dinero tal y como os indicaré». A su hijo mayor le dijo: «Tú te quedarás con 1 bezant (una moneda de oro acuñada por primera vez en Bizancio) y una séptima parte de lo que quede». A su segundo hijo le dijo: «Coge 2 bezants y una séptima parte del resto». A su tercer hijo: «Debes coger 3 bezant y una séptima parte de lo que quede». Por tanto, entregó a cada hijo 1 bezant más que al hijo anterior y una séptima parte de lo que había quedado, y al último hijo, todo lo que quedaba. Tras cumplir a rajatabla las instrucciones del padre, los hijos descubrieron que se habían repartido la herencia equitativamente. ¿Cuántos hijos eran y a cuánto ascendía la herencia?

Para el lector interesado, presentaré tanto la solución algebraica (moderna) como la solución retórica de Fibonacci a este problema en el apéndice 6. El *Liber abaci* proporcionó a Fibonacci un reconocimiento considerable, y su fama incluso llamó la atención del emperador romano-germánico

Federico II, conocido como «Stupor Mundi» (Maravilla del mundo) por su labor como mecenas de las matemáticas y las ciencias. Fibonacci fue invitado a una recepción con el emperador en Pisa a principios de la década de 1220, donde el Maestro Johannes de Palermo, uno de los matemáticos de la corte, le propuso una serie de lo que se consideraban problemas matemáticos de gran dificultad. Uno de los problemas fue el siguiente: «Encuentre un número *racional* (un número entero o una fracción) tal que cuando se le añade o resta 5 a su cuadrado, el resultado (en ambos casos) es también el cuadrado de un número racional». Fibonacci resolvió todos los problemas mediante ingeniosos métodos, y más tarde describió dos de ellos en un libro corto llamado *Flos* (Flor) y utilizó el descrito más arriba en el prólogo de otro libro que dedicó al emperador: *Liber quadratorum* (Libro de los cuadrados). Desde nuestro punto de vista, debería impresionarnos el hecho de que sin recurrir a ningún tipo de ordenador o calculadora, simplemente mediante su virtuoso dominio de la teoría numérica, Fibonacci fuera capaz de descubrir que la solución al problema anterior es $^{41}/_{12}$.Ciertamente, $(^{41}/_{12})^2 + 5 = (^{49}/_{12})^2$ y $(^{41}/_{12})^2 - 5 = (^{31}/_{12})^2$.

El papel de Fibonacci en la historia de la Proporción Áurea es realmente fascinante. Por un lado, en los problemas en que utilizó conscientemente la Proporción Áurea, Fibonacci es responsable de un avance significativo aunque no espectacular. Por otro lado, simplemente con formular un problema que en apariencia no mantenía relación alguna con la Proporción Áurea, consiguió expandir el alcance de ésta, así como sus aplicaciones de forma extraordinaria.

Las contribuciones directas de Fibonacci a la literatura sobre la Proporción Áurea aparecen en un breve libro sobre geometría, *Practica Geometriae* (Práctica de geometría), publicado en 1223. Fibonacci introdujo nuevos métodos para el cálculo de la diagonal y el área del pentágono, de los lados del pentágono y el decágono a partir del diámetro del círculo que los inscribe o circunscribe, así como cómputos del volumen del dodecaedro y el icosaedro, todos ellos íntimamente relacionados con la Proporción Áurea. En las soluciones a estos problemas, Fibonacci demuestra un conocimiento profundo de la geometría euclidiana. A pesar de que su técnica matemática se apoya hasta cierto punto en trabajos anteriores, en especial los presentados por Abu Kamil en *Sobre el pentágono y el decágono*, es evidente que Fibonacci extendió el uso de la Proporción Áurea y sus propiedades a diversas aplicaciones geométricas. De todos modos, la fama de Fibonacci y su contribución más emocionante a la Proporción Áurea, emana de un problema en apariencia inocente del *Liber abaci*.

EL CONEJO SÓLO PIENSA EN CONEJOS

Muchos estudiantes de matemáticas, de ciencias y de arte sólo han oído hablar de Fibonacci a raíz del siguiente problema que figura en el capítulo XII del *Liber abaci*:

> Un hombre encerró a una pareja de conejos en un lugar rodeado por un muro por todas partes. ¿Cuántos pares de conejos pueden producirse a partir del par original durante un año si consideramos que cada pareja engendra al mes un nuevo par de conejos que se convierten en productivos al segundo mes de vida?

¿Cómo puede ser que los números resultantes de la cría de conejos tengan consecuencias matemáticas importantes? En realidad, la solución al problema es muy simple. Empezamos con un par de conejos. Tras el primer mes, el primer par da a luz a otro par, por tanto, tenemos dos pares.

En la figura 27, se representa el par adulto con el símbolo del conejo grande y el par joven con el símbolo pequeño. Tras el segundo mes, el par adulto da a luz a otro par joven, mientras que el par joven continúa creciendo. Por tanto, tenemos a tres pares, tal y como se indica en la figura. Tras el tercer mes, cada par adulto da a luz a otro par cada uno, y el par joven sigue creciendo; ya tenemos cinco pares. Tras el cuarto mes, cada uno de los tres pares adultos da a luz a otro par cada uno, y los dos pares jóvenes van creciendo, por lo que obtenemos un total de ocho pares. Tras el quinto mes, tenemos un par joven de cada uno de los cinco pares adultos más tres pares jóvenes de un total de trece. Ahora ya comprendemos cómo proceder para obtener el número de pares adultos, pares jóvenes y el total de pares para los siguientes meses. Suponga que sólo examinamos el número de pares adultos de un mes en concreto. El número estará compuesto por el número de pares adultos del mes anterior más la suma del número de pares jóvenes (que ya han crecido) del mismo mes anterior. Sin embargo, el número de pares jóvenes del mes anterior de hecho es igual al número de pares adultos del mes que precede al anterior. Por tanto, si cogemos un mes cualquiera (empezando por el tercero), simplemente el número de pares adultos será igual a la suma de los pares adultos de dos meses atrás. El número de pares adultos, por tanto, sigue la secuencia: 1, 1, 2, 3, 5, 8, … Puede comprobarse fácilmente mediante la figura que el número de pares jóvenes reproduce exactamente la misma secuencia, con la única salvedad de que sucede al mes siguiente. Es decir, el número de pares jóvenes es 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … Por supuesto, el total de pares es simplemente la suma de la correlación anterior, y se obtiene la misma secuencia que la de los pares adultos, con la omisión de la primera cifra (1, 2, 3, 5, 8, …). En el siglo XIX, el

matemático francés Edouard Lucas (1842-1891), bautizó muy apropiadamente la secuencia 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., en la cual cada cifra (empezando por la tercera) es igual a la suma de las dos cifras anteriores, como secuencia de Fibonacci.

Las secuencias numéricas en las que la relación entre cifras sucesivas puede expresarse mediante una expresión matemática se denominan recursivas. La de Fibonacci fue la primera secuencia recursiva conocida en Europa.

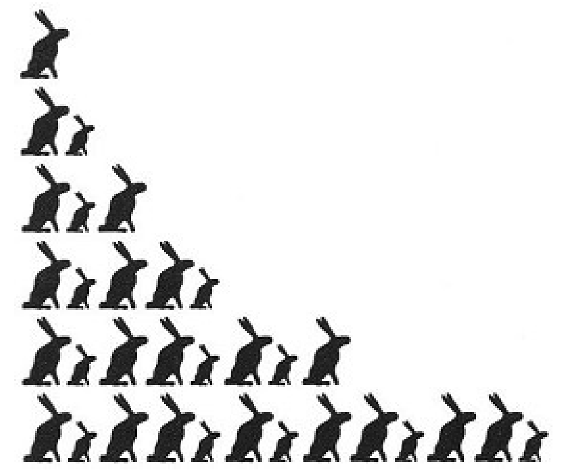


FIGURA 27

La propiedad general según la cual cada cifra de la secuencia es igual a la suma de las dos cifras que la preceden se expresa matemáticamente del siguiente modo (según una notación introducida en 1634 por el matemático Albert Girard): $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. F_n representa el número que ocupa la posición n en la secuencia (por ejemplo, F_5 es la quinta cifra); F_{n+1} es la cifra que sigue a F_n (para $n = 5$, $n + 1 = 6$), y F_{n+2} sigue a F_{n+1}.

La razón para que el nombre de Fibonacci sea tan famoso hoy en día se debe a que la presencia de la secuencia de Fibonacci se utiliza mucho más que para la cría de conejos. Por cierto, el título que da nombre a este capítulo

proviene de un libro de Ralph Waldo Emerson titulado *The Natural History of Intellect* que apareció en 1893. Según Emerson: «La tortuga sólo piensa en tortugas, y el conejo, en conejos». Encontraremos la secuencia de Fibonacci en una gran variedad de fenómenos en principio poco relacionados entre sí.

Para empezar, examinemos un fenómeno a las antípodas del tema de la cría de conejos: la óptica de los rayos de luz. Suponga que tenemos dos placas de dos tipos de cristal ligeramente distintos (distintas propiedades de refracción lumínica o «índices de refracción») colocados uno frente al otro (como en la figura 28a). Si dirigimos una fuente de luz que los atraviese, los rayos pueden (en principio) reflejarse en el interior en cuatro superficies reflectoras antes de emerger por el otro lado (figura 28a). Para ser más precisos, los rayos pueden atravesar las placas sin reflejar nada o pueden sufrir un reflejo interno, dos reflejos internos, tres reflejos internos, etc.; potencialmente, pueden sufrir un número infinito de reflejos internos antes de emerger. Todo lo anterior son trayectorias descritas por la ley de la óptica. A continuación, cuente el número de haces que emergen de este sistema de dos placas. En el caso de no producirse ningún tipo de reflejo, sólo emergerá un haz (figura 28b). Emergerán dos haces cuando los rayos lleven a cabo todas las posibilidades que permite un reflejo interno (figura 28c), ya que el rayo puede trazar dos trayectorias; tres haces para todas las posibilidades de dos reflejos internos (figura 28d); cinco haces para tres reflejos internos (figura 28e); ocho trayectorias si el rayo se refleja cuatro veces (figura 28f); trece trayectorias para cinco reflejos (figura 28g), etcétera. El número de rayos emergentes (1, 2, 3, 5, 8, 13, …) forma una secuencia de Fibonacci.

Ahora pasemos a considerar un problema totalmente distinto. Un niño intenta subir una escalera. El número máximo de peldaños que puede subir de una sola vez es dos; es decir, puede subir o bien uno o bien dos peldaños cada vez. Si en total hay n peldaños, ¿de cuántas formas, C_n, puede subir las escaleras? Si sólo hay un peldaño ($n = 1$), es evidente que existe una única forma de subirla, $C_1 = 1$. Si hay dos peldaños, el niño puede subir los dos peldaños de una vez o bien de uno en uno; por tanto, hay dos formas, $C_2 = 2$. Si hay tres peldaños, existirán tres formas de subir: 1 + 1 + 1, 1 + 2, o 2 + 1; por tanto, $C_3 = 3$. Si hay cuatro peldaños, el número de formas de subir la escalera se incrementa a $C_4 = 5$: 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 2 + 1 + 1, 2 + 2. Para cinco peldaños, existen ocho maneras, $C_5 = 8$: 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + + 1 + 2, 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + + 1 + 2, 1 + 2 + 2. Con este ejemplo descubrimos que el número de posibilidades, 1, 2, 3, 5, 8, …, forma una secuencia de Fibonacci.

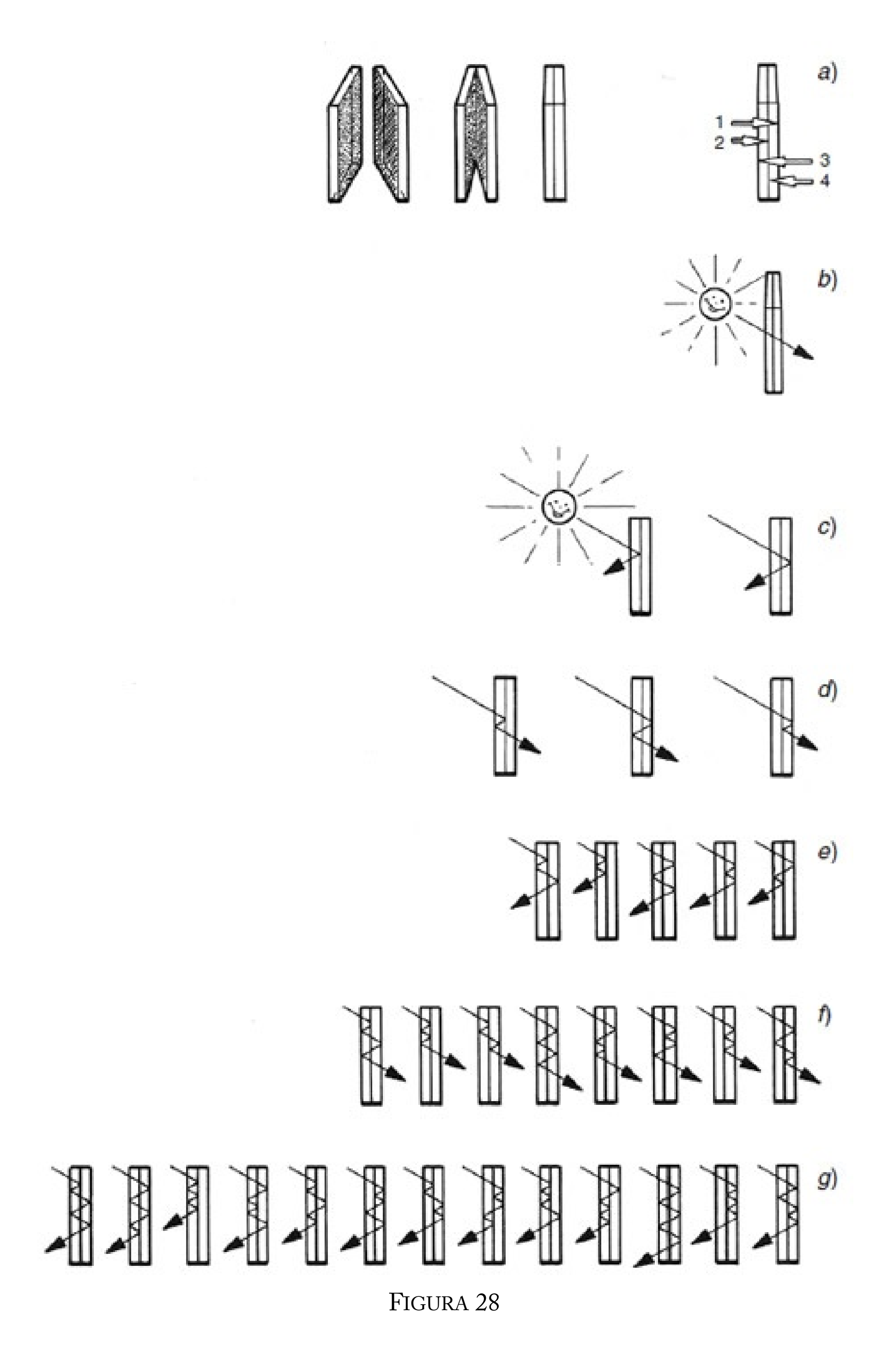


FIGURA 28

Para terminar, examinemos el árbol genealógico de un zángano o abeja macho. Los huevos de las abejas obreras no fertilizadas evolucionan en zánganos. En consecuencia, un zángano no tiene «padre» sino sólo «madre». Los huevos de la reina, por otro lado, son fertilizados por zánganos y evolucionan a hembra (ya sea trabajadora o reina). Una abeja hembra tiene, de este modo, «padre» y «madre». Por tanto, un zángano sólo tiene un progenitor (su madre), dos abuelos (los progenitores de su madre), tres bisabuelos (los dos progenitores de su abuela y uno de su abuelo), cinco tatarabuelos (dos por cada bisabuela y uno por su bisabuelo), etc. Los números del árbol genealógico, 1, 1, 2, 3, 5…., forman una secuencia de Fibonacci. El árbol se presenta en forma de gráfico en la figura 29.

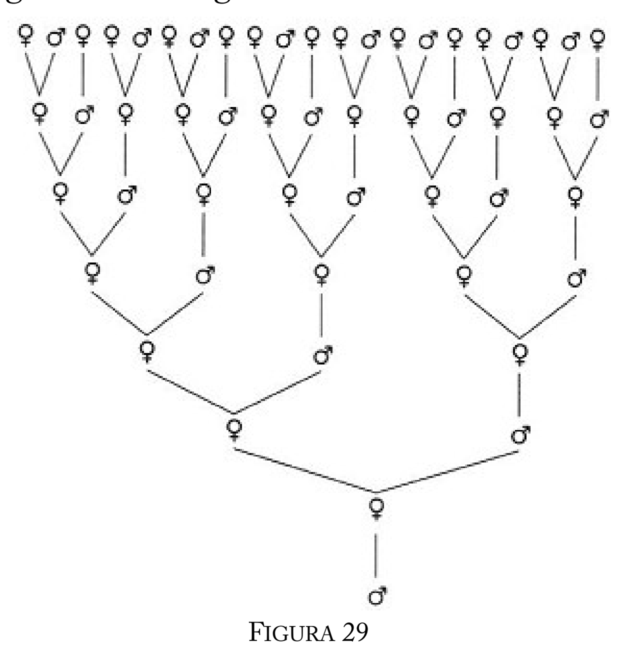


FIGURA 29

Todo esto resulta bastante intrigante: las mismas series de números pueden aplicarse a conejos, la óptica y los árboles genealógicos de los zánganos. Pero ¿de qué modo

está relacionada la secuencia de Fibonacci con la Proporción Áurea?

FIBONACCIS ÁUREOS

Examinemos de nuevo la secuencia de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, …, y en esta ocasión fijémonos en las proporciones de números sucesivos (calculados hasta el sexto lugar decimal):

1/1 = 1,000000

2/1 = 2,000000

3/2 = 1,500000

5/3 = 1,666666

8/5 = 1,600000

13/8 = 1,625000

21/13 = 1,615385

34/21 = 1,619048

55/34 = 1,617647

89/55 = 1,618182

144/89 = 1,617978

233/144 = 1,618056

377/233 = 1,618026

610/377 = 1,618037

987/610 = 1,618033

¿Reconocen la última proporción? A medida que descendemos a través de la secuencia de Fibonacci, la proporción de dos números Fibonacci sucesivos va oscilando (siendo alternativamente mayor o menor) pero se va acercando cada vez más a la Proporción Áurea. Si denominamos el número Fibonacci que ocupa la posición *n* como F_n, y el siguiente como F_{n+1}, descubriremos que la proporción F_{n+1}/F_n se acerca a Φ (debido a que *n* va

aumentando). A pesar de que esta propiedad fue descubierta en 1611 (aunque es probable que un italiano anónimo la descubriera incluso antes) por el famoso astrónomo alemán Johannes Kepler, tuvieron que pasar más de cien años para que el matemático escocés Robert Simson (1687-1768) pudiera probar (y ni siquiera completamente) la relación existente entre los números Fibonacci y la Proporción Áurea. Por cierto, parece ser que Kepler dio con la secuencia de Fibonacci sin ni siquiera haber leído el *Liber abaci*.

Pero ¿de qué forma se relacionan las cifras de una secuencia deducida a partir de la cría de conejos con una proporción definida mediante la división de una línea? Para entender esta conexión, debemos regresar a la asombrosa fracción continua del capítulo 4. Recuerden que descubrimos que la Proporción Áurea puede escribirse así

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}.$$

En principio, podríamos calcular el valor de Φ del dibujo mediante una serie de aproximaciones sucesivas interrumpiendo la fracción continua cada vez más abajo. Supongan que sólo intentamos hacer eso. Obtendríamos las siguientes series de valores (recordatorio: 1 sobre *a/b* es igual a *b/a*):

$$1 = 1{,}00000$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2{,}00000$$

$$1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}50000$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} = 1{,}66666$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5} = 1{,}60000$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}} = \frac{13}{8} = 1{,}62500 \cdot$$

En otras palabras, las sucesivas aproximaciones que hallamos para la Proporción Áurea son exactamente iguales a las proporciones de los números Fibonacci. No debería sorprendernos, por tanto, que al recurrir a cifras cada vez más altas de la secuencia, la proporción converja en la Proporción Áurea. Esta propiedad está descrita maravillosamente en el libro *On Growth and Form* del famoso naturalista Sir D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948), quien dice lo siguiente respecto a los números Fibonacci: «Sobre estos famosos y fascinantes números, un

amigo matemático me escribe: "Todo el romanticismo de las fracciones continuas, relaciones lineales recurrentes… yace en ellos, y son la fuente de una infinita curiosidad. Qué interesante resulta observar el modo en que luchan por alcanzar lo inalcanzable, la Proporción Áurea, por ejemplo; y ésta es sólo una de las miles de relaciones similares"». La convergencia con la Proporción Áurea, por cierto, explica el truco de magia descrito en el capítulo 4. Si definimos las series de números mediante la propiedad según la cual cada cifra (empezando por la tercera) es igual a la suma de las dos precedentes, entonces, al margen de los dos números con los que empieces, y siempre y cuando desciendas suficientemente por la secuencia, la proporción de dos cifras sucesivas siempre se aproximará a la Proporción Áurea.

Los números Fibonacci, como la «aspiración» de sus proporciones —la Proporción Áurea—, disponen de propiedades realmente sorprendentes. La lista de las relaciones matemáticas en que participan los números Fibonacci es literalmente infinita. A continuación veremos tan sólo algunas de ellas.

«Cuadrando» Rectángulos

Si sumamos los productos de una serie de números Fibonacci sucesivos, como, por ejemplo, los tres productos 1 × 1 + 1 × 2 + + 2 × 3, entonces la suma (1 + 2 + 6 = 9) será igual al cuadrado del último número Fibonacci utilizado en los productos (en este caso, $3^2 = 9$). Otro ejemplo: si sumamos el resultado de siete productos, 1 × 1 + 1 × 2 + 2 × 3 + 3 × 5 + 5 × 8 + 8 × 13 + 13 × 21 = 441, la suma (441) será igual al cuadrado del último número utilizado ($21^2 = 441$). Igualmente, sumando los siguientes nueve productos 1 × 1 + 1 × 2 + 2 × 3 + 3 × 5 + 5 × 8 + 8 × 13 + 13 × 21 + 21 × 34 + 34 × 55 + 55 × 89 + 89 × 144 = 144^2. Esta propiedad puede

representarse espléndidamente mediante la figura 30. Cualquier rectángulo con lados iguales a números Fibonacci sucesivos encaja con gran precisión en un cuadrado. La figura muestra un ejemplo con siete rectángulos de estas características.

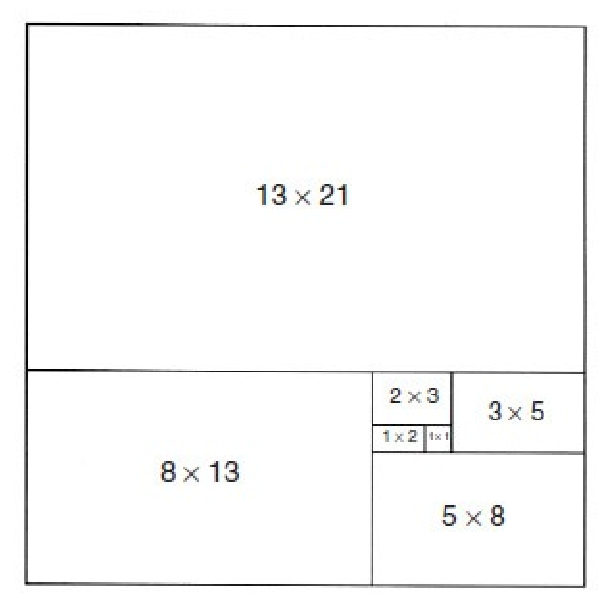


FIGURA 30

El once es pecado

En la obra de teatro *Los Piccolomini*, del dramaturgo y poeta alemán Friedrich Schiller, el astrólogo Seni declara lo siguiente: «Elf ist die Sünde. Elfe überschreiten die zehn Gebote» (El once es pecado. El once transgrede los Diez Mandamientos), expresando una opinión que se remontaba a la Edad Media. Una propiedad de la secuencia de Fibonacci, por otro lado, tiene relación con el número 11, el cual, lejos de ser pecaminoso, es un número de gran belleza.

Suponga que sumamos los diez primeros números Fibonacci consecutivos: 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143. La suma es divisible por 11 (143/11 = 13). Lo mismo ocurre con la suma de *cualesquiera* diez números

Fibonacci consecutivos. Por ejemplo, 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1.597 + 2.584 + 4.181 = 10.857; 10.857 es divisible por 11, 10.857/11 = 987. Si examina los dos ejemplos anteriores, descubrirá algo más. La suma de cualesquiera diez números consecutivos es siempre igual a 11 veces el séptimo número. Puede utilizar esta propiedad para asombrar a una audiencia con la rapidez con la que puede sumar diez números Fibonacci sucesivos cualesquiera.

¿La venganza del sexagesimal?

Como recordarán, por razones que no están del todo claras, los antiguos babilonios usaban una base 60 (la base sexagesimal) en su sistema de cálculo. Aunque no tenga nada que ver con el sistema numérico babilónico, resulta que el número 60 tiene un papel destacado en la secuencia de Fibonacci.

Los números Fibonacci se hacen muy largos bastante deprisa porque siempre se añaden dos números Fibonacci sucesivos para encontrar el siguiente número. En realidad, tenemos suerte de que los conejos no vivan eternamente porque si no acabaríamos inundados de conejos. Mientras que el quinto número Fibonacci es sólo 5, el que ocupa la posición 125 ya es el 59.425.114.757.512.643.212.875.125. Resulta interesante destacar que el dígito de la unidad se repite con una periodicidad de 60 (es decir, cada 60 números). Por ejemplo, el segundo número es 1, el número que ocupa la posición sesenta y dos es 4.052.739.537.881 (que también acaba en 1); el número que ocupa la posición 122, 14.028.366.653.498.915.298.923.761, también acaba en 1; y también ocurre lo mismo con el que ocupa la posición 182, etc. De igual modo, el que ocupa la posición 14 es 377; la setenta y cuatro (sesenta números más allá en la secuencia) 1.304.969.544.928.657 también acaba en 7, etc.

Esta propiedad la descubrió en 1774 el matemático francés de origen italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813), responsable de numerosos estudios en teoría numérica y mecánica e investigador de la estabilidad del sistema solar. Los dos últimos dígitos (por ejemplo, 01, 01, 02, 03, 05, 08, 13, 21…) se repiten en la secuencia con una periodicidad de 300 y los tres últimos dígitos lo hacen con una periodicidad de 1.500. En 1963, Stephen P. Geller utilizó un ordenador IBM 1620 para demostrar que los cuatro últimos dígitos se repiten cada 15.000 veces, los cinco últimos cada 150.000 veces, y, finalmente, después de que el ordenador hiciera cálculos durante tres horas, la repetición de los seis últimos dígitos apareció en el número Fibonacci que ocupa la posición 1.500.000. Geller, desconocedor del hecho de que podía demostrarse un teorema general sobre la periodicidad de los últimos dígitos, comentó: «Aunque parece que aún no existe un modo de conjeturar el siguiente periodo, es posible que un nuevo programa que permita iniciar el proceso en cualquier punto de la secuencia reduzca el tiempo que necesita la máquina para procesar más datos.» Poco después, sin embargo, el matemático israelí Dov Jarden señaló que se puede demostrar de forma rigurosa que para cualquier número de últimos dígitos a partir de tres, simplemente la periodicidad es quince veces diez para una potencia que es uno menos que el número de dígitos (es decir, para siete dígitos sería 15×10^6, o15 millones).

¿Por qué $^1/_{89}$?

Las propiedades de nuestro universo, desde el tamaño de los átomos al de las galaxias, están determinadas por los valores de unos cuantos números conocidos como constantes de la naturaleza. Estas constantes incluyen medidas de intensidad de todas las fuerzas básicas (gravitacional,

electromagnética y dos fuerzas nucleares). La intensidad de la conocida fuerza electromagnética entre dos electrones, por ejemplo, en física se expresa mediante una constante conocida como constante de estructura fina. El valor de esta constante, bastante cerca de $^1/_{137}$, ha desconcertado a generaciones de físicos. Un chiste sobre el famoso físico inglés Paul Dirac (1902-1984), uno de los fundadores de la mecánica cuántica, cuenta que cuando éste llegó al cielo, Dios le permitió hacer una pregunta. Su pregunta fue: «¿Por qué $^1/_{137}$?»

La secuencia de Fibonacci también contiene un número absolutamente extraordinario: el 89, que ocupa la posición undécima. El valor de $^1/_{89}$ en representación decimal es igual a 0,01123595. Suponga que ordenamos los números Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … como fracciones decimales del siguiente modo:

0,01
0,001
0,0002
0,00003
0,000005
0,0000008
0,00000013
0,000000021

En otras palabras, el dígito de las unidades en el primer número Fibonacci ocupa el segundo lugar decimal, el del segundo está en el tercer lugar decimal, etc. (el dígito de las unidades del número Fibonacci que ocupa la posición *n* está en la posición decimal *n* + 1. Ahora sume todos estos números. Para la lista anterior, obtendríamos 0,01123595…, que es igual a $^1/_{89}$.

Trucos para sumas relámpago

Hay gente que puede sumar números mentalmente muy rápido. La secuencia de Fibonacci permite que una persona pueda realizar este tipo de trucos para sumas relámpago con poco esfuerzo. La suma de todos los números Fibonacci desde el primero hasta el que ocupa la posición n simplemente es igual al número que ocupa la posición (n + 2) menos 1. Por ejemplo, la suma de los primeros diez números, 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143, es igual al duodécimo número (144) menos 1. La suma de los primeros setenta y ocho números es igual al número que ocupa la posición ochenta menos 1, etc. Por tanto, haz que alguien escriba una larga columna de números que empiece por 1, 1, y que continúe utilizando la definición de la secuencia de Fibonacci (cada nuevo número es la suma de los dos anteriores). Indica a esta persona que dibuje una línea entre dos números al azar de la columna y podrá, con sólo un vistazo, dar el resultado de la suma de todos los números anteriores a la línea. La suma será igual a la segunda cifra después de la línea menos uno.

Fibonaccis pitagóricos

Aunque resulte extraño, los números Fibonacci pueden incluso relacionarse con los tripletes pitagóricos. Estos últimos, como recordarán, son números tripletes que pueden servir para medir las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo (como los números 3, 4, 5). Coja cuatro números Fibonacci consecutivos cualesquiera, como, por ejemplo, 1, 2, 3, 5. El producto de los números de los extremos, 1 × 5 = 5, el doble del producto de los números interiores, 2 × 2 × 3 = 12, y la suma de los cuadrados de las cifras interiores, 2^2 + 3^2 = 13, da los tres lados del triplete pitagórico, 5, 12, 13 (5^2

+ $12^2 = 13^2$). Pero aquí no acaba todo. Fíjense también en que el tercer número, 13, es un número Fibonacci. Esta propiedad la descubrió el matemático Charles Raine.

Dadas las numerosas maravillas que guardan los números Fibonacci (dentro de poco descubriremos muchas más), no resulta extraño que los matemáticos buscaran un método eficiente para el cálculo de estos números, F_n, para cualquier valor de n. Aunque en principio no debería ser un problema, ya que si necesitamos el número que ocupa la posición 100 lo único que debemos hacer es sumar los números de las posiciones 98 y 99, continuamos necesitando calcular primero todos los números anteriores a la posición 99, lo que puede ser enormemente tedioso. Como dijo en una ocasión el cómico fallecido George Burns (en su libro *How to Live to Be 100 or More*): «¿Cómo vivir hasta los 100 años o más? Deben hacerse una serie de cosas. La más importante es que debes hacer todo lo posible para vivir hasta los 99».

A mediados del siglo XIX, el matemático francés Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) redescubrió una fórmula que al parecer ya conocían, en el siglo XVIII, el matemático más prolífico de la historia, Leonard Euler (1707-1783), y el matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754). La fórmula permite conocer el valor de cualquier número Fibonacci, F_n, si conocemos el lugar que ocupa en la secuencia, n. La fórmula de Binet depende completamente de la Proporción Áurea

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

A primera vista resulta una fórmula muy desconcertante, ya que ni siquiera existe la certeza de que, al sustituir diversos valores de n, el resultado produzca números enteros (como lo son todas las cifras de la secuencia de Fibonacci). Dado que ya sabemos que los números Fibonacci están íntimamente relacionados con la Proporción Áurea, las cosas empiezan a aclararse al descubrir que la primera cifra del corchete es, de hecho, la Proporción Áurea elevada a la enésima potencia, Φ^n, y que la segunda es $(-1/\Phi)^n$. (Recuerden que la solución en negativo de la ecuación cuadrática que define a Φ es igual a $-1/\Phi$). Con la ayuda de una simple calculadora científica de bolsillo, se pueden comprobar una serie de valores de n para demostrar que la fórmula de Binet proporciona con precisión los números Fibonacci. Para valores de n relativamente grandes, la segunda cifra en el interior de los corchetes se hace muy pequeña, por tanto, mejor será que coja F_n para conseguir el número entero más cercano a $\phi^n/\sqrt{5}$. Por ejemplo, para $n = 10$, $\phi^n/\sqrt{5}$ es igual a 55,0036, y el décimo número Fibonacci es 55.

A modo de divertimento, puede preguntarse si existe un número Fibonacci con exactamente 666 dígitos. Clifford A. Pickover, matemático y escritor, denomina a los números asociados con el 666 «apocalípticos» y descubrió que el número Fibonacci 3.184º tenía 666 dígitos.

Una vez descubiertos, parece ser que los números Fibonacci surgen en cualquier manifestación de la naturaleza. La botánica ofrece algunos ejemplos fascinantes de esto.

EL GIRASOL SE VUELVE CONTRA SU CREADOR

Las hojas en la ramita de una planta o los tallos en una rama tienen tendencia a crecer en posiciones que optimizan su exposición al sol, la lluvia y el aire. Cuando un tallo vertical crece, produce hojas a espacios bastante regulares. De todos modos, las hojas no crecen directamente una encima de la otra, ya que eso impediría que las hojas inferiores recibieran la necesaria humedad y luz del sol. Por tanto, la transición de una hoja a la siguiente (o de un tallo al siguiente a lo largo de la rama) se caracteriza por una disposición en forma de tornillo alrededor del tallo (como se indica en la figura 31). En las escamas de las piñas o en las semillas del girasol encontramos disposiciones similares de unidades repetidas. Este fenómeno se denomina *filotaxis* (disposición de las hojas en griego), una palabra acuñada por el naturalista suizo Charles Bonnet (1720-1793). Por ejemplo, en las hojas del limero normalmente ocurre en dos lados opuestos (que corresponde a media vuelta alrededor del tallo), lo que se conoce como $^1/_2$ proporción filotáctica. En otras plantas, como el avellano, la zarza o el haya, pasar de una hoja a la siguiente implica una tercera parte del giro ($^1/_3$ proporción filotáctica). De igual modo, el manzano, la encina de la costa y el albaricoquero producen hojas cada $^2/_5$ de giro, y el peral y el sauce llorón, cada $^3/_8$. La figura 31 ilustra un caso en el que han sido necesarios tres giros completos para pasar a través de ocho tallos (una proporción filotáctica de $^3/_8$). Descubrirán que todas las fracciones mencionadas son proporciones de miembros alternos de la secuencia de Fibonacci.

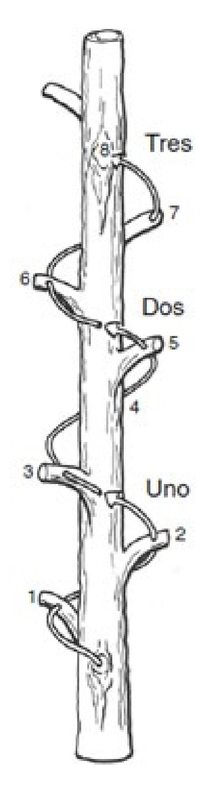


FIGURA 31

En la antigüedad, el primero en descubrir que las hojas de las plantas seguían un patrón determinado fue Teofrasto (circa 372 a.C.-circa 287 a.C.), quien lo expuso en su obra *Historia de las plantas*: «aquellas que tienen hojas planas las tienen en series regulares». Plinio el Viejo (23-79 d.C.) realizó una observación similar en su monumental obra *Historia Natural*, donde habla de «intervalos regulares» entre hojas «ordenadas circularmente alrededor de las ramas». El estudio de la filotaxis no fue mucho más allá de estas primeras observaciones cualitativas hasta el siglo XV, cuando Leonardo da Vinci (1452-1519) añadió un elemento cuantitativo a la descripción de la disposición de las hojas al darse cuenta de que las hojas se disponían siguiendo modelos espirales en ciclos de cinco (que corresponden a un

ángulo de $^2/_5$ por cada giro). La primera persona que descubrió (de un modo intuitivo) la relación entre la filotaxis y los números Fibonacci fue el astrónomo Johannes Kepler. Kepler escribió: «Es en la semejanza de estas series que se desarrollan por sí mismas (refiriéndose a la propiedad repetitiva de la secuencia de Fibonacci) el modo en que, en mi opinión, se forma la facultad de propagación; y así, en una flor, se muestra la auténtica señal de esta facultad, el pentágono».

Charles Bonnet inició estudios metódicos en la observación filotáctica. En su libro publicado en 1754 *Recherches sur l'Usage des Feuilles dans les Plantes* (Investigación sobre el uso de las hojas en las plantas), Bonnet nos ofrece una descripción clara de la filotaxis $^2/_5$. Es posible que, mientras trabajaba con el matemático G. L. Calandrini, Bonnet también descubriera que en algunas plantas aparecen grupos de series en espiral (hoy en día conocidos como *parastichies*), como en las escamas de las piñas de abeto o de las piñas.

La historia de la auténtica filotaxis *matemática* (en oposición a las aproximaciones puramente descriptivas) empieza en el siglo XIX con las obras del botánico Karl Friedrich Schimper (publicadas en 1830), su amigo Alexander Braun (publicadas en 1835) y el cristalógrafo Auguste Bravais y su hermano botánico Louis (publicadas en 1837). Estos investigadores descubrieron la regla general según la cual las proporciones filotácticas pueden expresarse por las proporciones de las cifras de la serie de Fibonacci (como $^2/_5$, $^3/_8$), y también se percataron de la aparición de números Fibonacci consecutivos en los *parastichies* de las piñas de pino y de las piñas americanas.

Estas últimas nos ofrecen una manifestación verdaderamente hermosa de una filotaxis basada en Fibonacci (figura 32). Cada escama hexagonal de la superficie de la piña forma parte de tres espirales diferentes. En la figura podemos ver una de las ocho series paralelas descender suavemente desde la parte inferior izquierda hasta la parte superior derecha, una de las trece series paralelas que asciende más abruptamente desde la parte inferior derecha hasta la parte superior izquierda y una de las veintiuna series paralelas, muy abruptas (desde la izquierda inferior a la derecha superior). La mayoría de piñas tienen cinco, ocho, trece o veintiuna espirales con una pronunciada pendiente en su superficie. Todos estos son números Fibonacci.

¿Cómo saben las plantas el modo de disponer sus hojas siguiendo el patrón Fibonacci? El crecimiento de la planta empieza en la punta del tallo (llamado el meristemo), que tiene forma cónica (al ser más delgado en la punta). Las hojas más alejadas de la punta (es decir, que han crecido antes) tienden a situarse radialmente más lejos del centro del tallo cuando se miran desde arriba (porque aquí el tallo es más grueso). La figura 33 nos muestra esta vista del tallo desde lo alto, donde las hojas están numeradas según su orden de aparición. La hoja 0, que apareció primero, es ahora la más alejada del meristemo y del centro del tallo. El botánico A. H. Church, en su libro publicado en 1904 *On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws*, fue el primero en destacar la importancia de este tipo de representación para la comprensión de la filotaxis. Lo que descubrimos (al imaginar una curva que conecta las hojas 0 a 5 en la figura 33) es que las sucesivas hojas se asientan a lo largo de una espiral cerrada, conocida como espiral generativa. La cantidad a destacar que caracteriza la ubicación de las hojas es el ángulo entre las líneas que conectan el centro del tallo

con las sucesivas hojas. Uno de los descubrimientos de los hermanos Bravais, de 1837, fue que las nuevas hojas apenas avanzan por el mismo ángulo alrededor del círculo y que este ángulo (conocido como el ángulo de divergencia) es normalmente cercano a los 137, 5º. ¿Le sorprende oír que este valor está determinado por la Proporción Áurea? El ángulo que divide un giro completo en Proporción Áurea es 360º/Φ = 222, 5º. Como esto es más de la mitad de un círculo (180º), deberíamos medirlo en dirección opuesta alrededor del círculo. En otras palabras, deberíamos restar 222, 5 de 360, lo que nos daría el ángulo observado de 137, 5º (a veces denominado Ángulo Áureo).

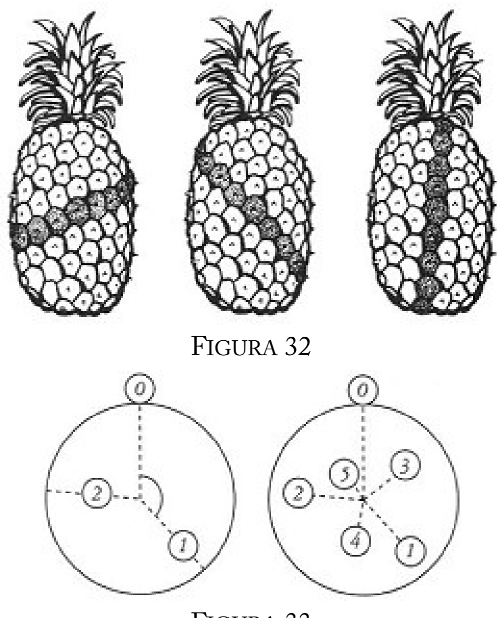


FIGURA 32

FIGURA 33

El matemático alemán G. van Iterson, en un estudio pionero de 1907, demostró que si se envuelven estrechamente puntos separados por 137, 5 grados en espirales fuertemente enrolladas, el ojo distinguirá una familia de modelos de espirales enrolladas en el sentido de las agujas del reloj y otra en el sentido opuesto. Los números

de espirales de las dos familias tienden a ser números Fibonacci consecutivos, ya que la proporción de estos números se aproxima a la Proporción Áurea.

Las espirales enrolladas en sentido contrario a las agujas del reloj más espectaculares las encontramos en la disposición de las flores compuestas del girasol. Al observar la cabeza de un girasol (figura 34), descubrirán que las flores compuestas forman tanto modelos de espiral en el sentido de las agujas del reloj como modelos en el sentido contrario. Resulta evidente que las flores compuestas crecen de tal modo que permiten el reparto más eficiente del espacio horizontal. El número de estas espirales normalmente depende del tamaño del girasol. Lo más usual es que haya treinta y cuatro espirales en una dirección y cincuenta y cinco en la otra, pero se han visto girasoles con proporciones de números de espirales de 89/55, 144/89, e incluso (al menos en una ocasión, según informó una pareja de Vermont al *Scientific American* en 1951) de 233/144. Por supuesto, todas estas son proporciones de números Fibonacci adyacentes. En los girasoles más grandes, la estructura se alarga, cuando nos movemos del centro al perímetro, desde uno de los pares de números Fibonacci consecutivos al siguiente superior.

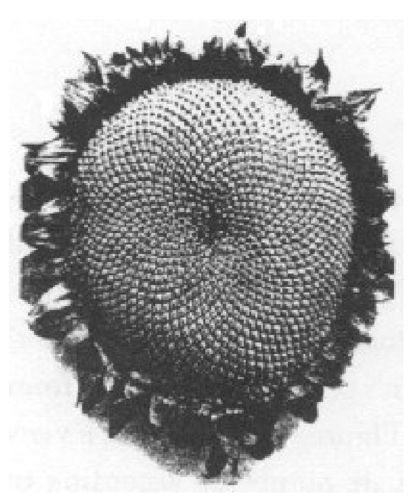


FIGURA 34

En algunas flores, el número total de pétalos y su disposición también albergan números Fibonacci y conexiones con la Proporción Áurea. Son muchos los que en alguna ocasión han confiado (al menos de forma simbólica) en el número de pétalos de las margaritas para satisfacer su curiosidad respecto a la intrigante pregunta: «Me quiere, no me quiere». La mayor parte de margaritas silvestres tienen trece, veintiún o treinta y cuatro pétalos, todos ellos números Fibonacci. (¿No estaría bien saber por anticipado si una margarita tiene un número de pétalos par o impar?) El número de pétalos simplemente refleja el número de espirales de una familia.

La hermosa disposición simétrica de los pétalos de la rosa también se basa en la Proporción Áurea. Si diseccionamos una rosa (pétalo a pétalo), descubriremos las posiciones de sus pétalos estrechamente apretados. En la figura 35 aparece un boceto en el que los pétalos han sido numerados. Los ángulos que definen las posiciones (en fracciones de un giro completo) de los pétalos son la parte fraccionada de simples múltiplos de Φ. El pétalo 1 es 0, 618

(la parte fraccionada de 1 × Φ) de un giro desde el pétalo 0; el pétalo 2 es 0,236 (la parte fraccionada de 2 × Φ) de un giro desde el pétalo 1, etcétera.

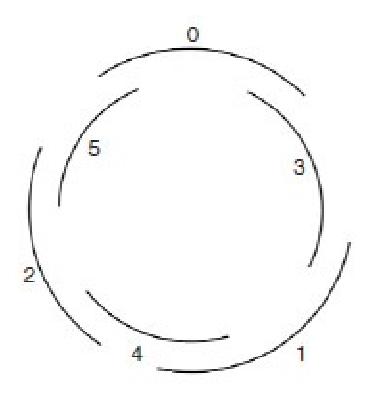


FIGURA 35

Esta descripción muestra que el enigma de 2.300 años de antigüedad acerca de los orígenes de la filotaxis puede resumirse con la siguiente pregunta básica: ¿por qué están separadas por un Ángulo Áureo de 137, 5 grados las hojas sucesivas? Existen dos formas para intentar responder a esta pregunta: las teorías que se centran en la geometría de la configuración y en reglas matemáticas simples que pueden generar dicha geometría, y los modelos que sugieren una causa dinámica para el comportamiento observado. Los trabajos más destacados de la primera opción (llevados a cabo por los matemáticos Harold S. M. Coxeter e I. Adler y por el cristalógrafo N. Rivier) indican que los brotes ubicados a lo largo de la espiral generativa y separados por el Ángulo Áureo se aprietan entre sí de forma más eficiente. Es fácil de entender. Si el ángulo divergente fuera de, por ejemplo, 120º (es decir, 360/3) o cualquier otro múltiplo racional de 360 grados, entonces las hojas se alinearían radialmente (a lo largo de tres líneas en el caso de 120 grados), dejando grandes espacios entre sí. Por otro lado, un ángulo divergente como el Ángulo Áureo (que es un

múltiplo irracional de 360 grados) asegura que los brotes no se alineen a lo largo de ninguna dirección radial específica, rellenando los espacios de forma eficiente. El Ángulo Áureo demuestra ser incluso mejor que otros múltiplos irracionales de 360 grados porque la Proporción Áurea es el más irracional de todos los números irracionales por este motivo. Recuerde que la Proporción Áurea es igual a una fracción continua compuesta enteramente por unos. Esta fracción continua converge de modo más lento que ninguna otra fracción continua. En otras palabras, la Proporción Áurea es el número irracional más difícilmente expresable en forma de fracción.

En un artículo aparecido en 1984 en el *Journal de Physique*, un equipo de científicos de la Université de Provence, en Marsella (Francia), dirigido por N. Rivier, empleó un simple algoritmo matemático para demostrar que cuando se utiliza un ángulo de crecimiento igual al Ángulo Áureo, las estructuras que se obtienen se parecen mucho a los auténticos girasoles. (Ver figura 36.) Rivier y sus colaboradores sugirieron que esto proporcionaba una respuesta a la pregunta planteada por el biólogo Sir D'Arcy Wentworth Thompson en su monumental obra clásica *On Growth and Form* (publicada en 1917 y revisada en 1942). En ella, Thompson se pregunta: «… y una de las características más curiosas del caso (filotaxis) es el limitado o incluso restringido número de posibles disposiciones que observamos y reconocemos». El equipo de Rivier descubrió que los requisitos de *homogeneidad* (que la estructura sea igual en todas partes) y de *auto-similitud* (que al examinar la estructura a diversas escalas, desde la menor a la mayor, tenga exactamente la misma apariencia) limitan drásticamente el número de posibles estructuras. Estas dos propiedades pueden resultar suficientes para explicar la

preponderancia de los números Fibonacci y de la Proporción Áurea en la filotaxis, pero todavía no ofrecen ninguna causa física.

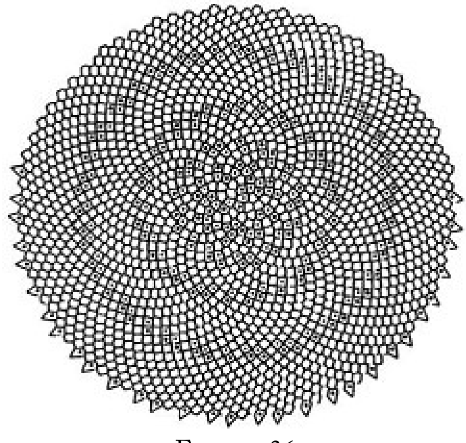


FIGURA 36

Las mejores pistas para una posible causa dinámica de la filotaxis no provienen de la botánica sino de experimentos de física realizados por L. S. Levitov (en 1991) y por Stephane Douady e Yves Couder (en 1992 y 1996). El experimento de Douady y Couder resulta especialmente fascinante. Colocaron una bandeja llena de aceite de silicona en un campo magnético que era más potente cerca del borde de la bandeja que en el centro. Dejaron caer periódicamente en el centro de la bandeja gotas de un fluido magnético que actuaban como diminutas barras magnéticas. Los pequeños imanes se repelían mutuamente y eran empujados de manera radial por el gradiente del campo magnético. Douady y Couder hallaron modelos que oscilaban, aunque por lo general convergían, sobre una espiral en la que el Ángulo Áureo separaba las sucesivas gotas. Habitualmente los sistemas físicos se estabilizan en estados que minimizan la energía. Por tanto, la idea es que la filotaxis simplemente representa un estado de energía mínima para un sistema de brotes que se repelen mutuamente. Otros modelos, en los

que las hojas aparecen en los puntos de mayor concentración de algún nutriente, también suelen producir separaciones semejantes al Ángulo Áureo.

Espero que la próxima ocasión en que coma piña, envíe una rosa a un ser querido o admire las pinturas de girasoles de van Gogh, recuerde que el modelo de crecimiento de estas plantas incluye a este número maravilloso que llamamos Proporción Áurea. No olvide, pese a todo, que el crecimiento de una planta depende de otros factores aparte del espacio óptimo. Por tanto, las reglas de la filotaxis que he descrito no deben aplicarse a todas las circunstancias, como ocurre con las leyes de la naturaleza. Por el contrario, en palabras de Coxeter, famoso matemático canadiense, son «sólo una fascinante *tendencia* generalizada».

La botánica no es el único lugar de la naturaleza en donde podemos encontrar la Proporción Áurea y los números Fibonacci, sino que ambos aparecen en fenómenos tan dispares en tamaño que van desde el nivel microscópico hasta las galaxias gigantes. A menudo, su apariencia adopta la forma de una magnífica espiral.

AUNQUE TRANSFORMADO, APAREZCO DE NUEVO IGUAL

Ninguna familia en toda la historia de las matemáticas ha producido a tantos matemáticos célebres (¡trece en total!) como la familia Bernoulli. Desconcertados por la furia española (la salvaje sublevación de los soldados españoles en Holanda), la familia se trasladó a Basilea, Suiza, desde los católicos Países Bajos dominados por los españoles. Tres miembros de la familia, los hermanos Jacques (1654-1705) y Jeanne (1667-1748), y el segundo hijo de este último, Daniel (1700-1782), destacaron por encima de los demás. Aunque resulte extraño, los Bernoulli se hicieron tan

famosos por su amarga rivalidad interfamiliar como por sus numerosos logros matemáticos. En una ocasión, las disputas entre Jacques y Jeanne alcanzaron un nivel particularmente cáustico. La chispa que encendió el fuego fue una disputa sobre una solución a un famoso problema de mecánica. El problema en cuestión, conocido con el nombre de braquistocrono (del griego *braquistos*, «el más corto», y *cronos*, «tiempo») debía hallar una curva a lo largo de la cual una partícula empujada por la fuerza de la gravedad la recorriera en el menor tiempo posible desde un punto a otro. Los dos hermanos propusieron la misma solución de forma independiente, pero la derivada de Jeanne era incorrecta, y éste intentó más tarde presentar la derivada de Jacques como si fuese suya. La triste consecuencia de esta cadena de acontecimientos fue que Jeanne se convirtió en profesor en Groningen y no volvió a pisar Basilea hasta después de la muerte de su hermano.

La relación de Jacques Bernoulli con la Proporción Áurea proviene de otra famosa curva. Jacques dedicó un tratado titulado *Spira Mirabilis* (Maravillosa espiral) a un tipo en concreto de espiral. Le impresionó tanto la belleza de la curva conocida como espiral logarítmica (figura 37; el nombre proviene de la forma en que el radio crece a medida que nos movemos alrededor de la curva en el sentido de las agujas del reloj) que exigió que la forma, y el lema que le asignó («Eadem mutato resurgo»: aunque transformado, aparezco de nuevo igual) fueran grabados en su tumba. El lema describe una propiedad fundamental única de la espiral logarítmica: su forma no se altera cuando aumenta su tamaño. Este rasgo se conoce con el nombre de auto-similitud. Fascinado por esta propiedad, Jacques escribió que la espiral logarítmica «puede usarse como símbolo tanto de la fortaleza y constancia frente a la adversidad como del

cuerpo humano, el cual, tras todas sus transformaciones, inclusive la muerte, será restaurado en su auténtico y perfecto ser».

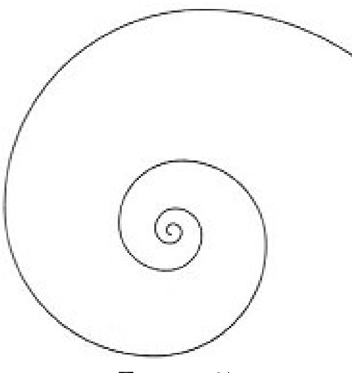


FIGURA 37

Si se detienen un momento a reflexionar, se darán cuenta de que esta propiedad se da en muchos fenómenos de crecimiento de la naturaleza. Por ejemplo, a medida que el molusco del nautilo crece en el interior de la concha (figura 4), va construyendo un habitáculo cada vez mayor y sellando los pequeños que ya no utiliza. Cada incremento en la longitud de la concha va acompañado de un incremento proporcional de su radio, de modo que la forma permanece inalterada. Por tanto, el nautilo percibe una «casa» idéntica a lo largo de toda su vida, y no necesita, por ejemplo, ajustar su equilibrio a medida que crece. Esta última propiedad también puede aplicarse a los carneros, cuyos cuernos también tienen la forma de espirales logarítmicas (aunque no radican en un plano), y a la curva de los colmillos del elefante. Cuando incrementa el tamaño por la acumulación en su interior, la espiral logarítmica se hace más ancha, aumentando la distancia entre sus «anillos», a medida que se aleja de la fuente, conocida como polo. Para ser más precisos, al girar ángulos iguales, aumenta la distancia desde el polo en igual proporción. Si pudiéramos, con la ayuda de

un microscopio, aumentar los anillos que no podemos ver a simple vista hasta el tamaño de la figura 37, encajarían a la perfección en la espiral mayor. Esta propiedad distingue a la espiral logarítmica de otra espiral común conocida como espiral de Arquímedes, la cual recibe su nombre del famoso matemático griego (circa 287-212 a.C.) que la describió extensamente en su libro *Sobre las espirales*. Podemos observar espirales de Arquímedes en el lado de un rollo de papel higiénico o en una cuerda enrollada en el suelo. En este tipo de espiral, la distancia entre los sucesivos anillos es siempre la misma. Como consecuencia de un error que probablemente no hubiera sentado nada bien a Jacques Bernoulli, el cantero que preparó su tumba en lugar de una espiral logarítmica grabó una espiral de Arquímedes.

A la naturaleza le encantan las espirales logarítmicas. Desde los girasoles, las conchas de moluscos o los remolinos hasta los huracanes o las galaxias gigantes en espiral, parece que la naturaleza ha elegido esta forma milagrosa como su «ornamento» preferido. La forma constante de la espiral logarítmica en todas las escalas de tamaño aparece en la naturaleza de un modo extremadamente hermoso en forma de minúsculos fósiles u organismos unicelulares conocidos como foraminíferas. Aunque en este caso las conchas en espiral son estructuras compuestas (y no un tubo continuo), las imágenes por rayos-X de la estructura interna de estos fósiles muestran que la forma de la espiral logarítmica permanece esencialmente inalterable durante millones de años.

El escritor y editor inglés Theodore Andrea Cook, en su obra clásica Th*e Curves of Life* (1914), ofrece numerosos ejemplos de espirales (no únicamente logarítmicas) presentes en la naturaleza y en el arte. Cook presenta espirales en

cosas tan diversas como las enredaderas, el cuerpo humano, escaleras o tatuajes maoríes. Al explicar sus motivaciones para escribir el libro, Cook dice: «para la existencia de estos capítulos sobre las formaciones en espiral, lo único que puedo alegar es el interés y belleza de la propia investigación».

También los artistas han apreciado la belleza de las espirales logarítmicas. En el estudio de Leonardo da Vinci sobre el tema mitológico de «Leda y el Cisne», por ejemplo, éste dibuja el pelo siguiendo una forma que se aproxima mucho a una espiral logarítmica (figura 38). Leonardo repite dicha forma en muchas ocasiones en los estudios que realiza sobre espirales en las nubes y el agua de los impresionantes bocetos para el *Diluvio*. En este trabajo, Leonardo combinó sus observaciones científicas de amenazadoras inundaciones con los aspectos alegóricos de las fuerzas destructivas que descienden de los cielos. Al describir una violenta corriente de agua, Leonardo escribe: «Las bruscas aguas penetran en el estanque que las contiene, golpeando los diversos obstáculos en remolinos espirales… Cuando las olas circulares se alejan del punto de impacto, se abalanzan sobre otras olas circulares que se mueven en dirección opuesta».

Edward B. Edwards, diseñador e ilustrador del siglo XX, confeccionó cientos de diseños decorativos que se basaban en la espiral logarítmica; la mayoría pueden observarse en su obra *Pattern and Design with Dynamic Symmetry* (en la figura 39 se ofrece un ejemplo).



FIGURA 38

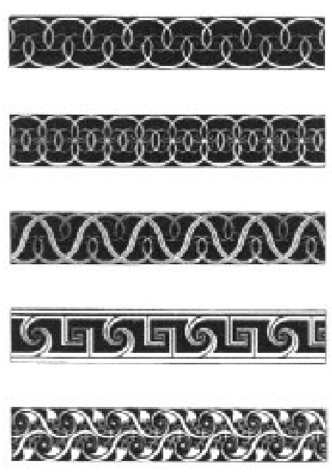


FIGURA 39

La espiral logarítmica y la Proporción Áurea van de la mano. Examine de nuevo las series de Rectángulos Áureos anidados que se obtienen al superponer cuadrados a un Rectángulo Áureo (figura 40; ya encontramos esta propiedad en el capítulo 4). Si conectamos los puntos sucesivos donde estos «cuadrados en remolino» dividen los lados en Proporciones Áureas, obtendremos una espiral

logarítmica que se enrosca hacia dentro en dirección al polo (el punto resultante de la intersección de las diagonales en la figura 26, denominada imaginativamente «el ojo de Dios»).

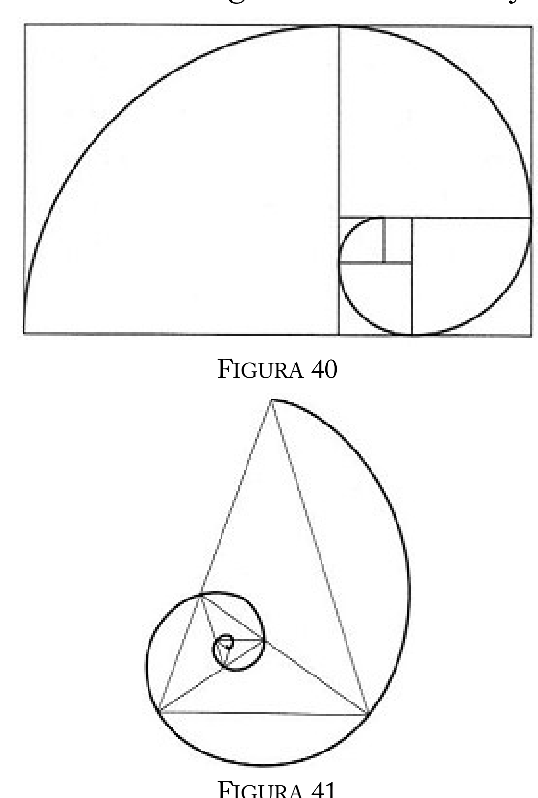


FIGURA 40

FIGURA 41

También se puede obtener una espiral logarítmica a partir de un Triángulo Áureo. En el capítulo 4 vimos que partiendo de un Triángulo Áureo (un triángulo isósceles cuyos lados están en Proporción Áurea respecto a la base) si bisecamos un ángulo de la base, conseguimos un Triángulo Áureo más pequeño. Si continuamos con el proceso de bisecar el ángulo de la base *ad infinitum*, generaremos una serie de triángulos en remolino. Al conectar los vértices de los Triángulos Áureos en progresión trazaremos una espiral logarítmica (figura 41).

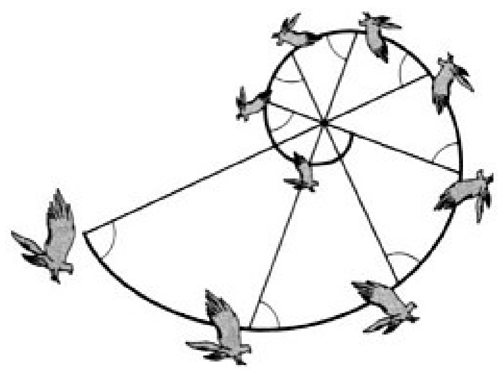


FIGURA 42

A la espiral logarítmica también se la conoce por el nombre de *espiral equiangular*. El nombre lo acuñó en 1638 el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), el nombre del cual utilizamos para denominar a los números que se emplean para localizar un punto del plano (de dos ejes): las coordenadas cartesianas. El nombre «equiangular» refleja otra propiedad única de la espiral logarítmica. Si se traza una línea recta desde el polo hacia cualquier punto de la curva, ésta queda cortada exactamente en el mismo ángulo (figura 42). Los halcones utilizan esta propiedad para atacar a sus presas. Los halcones peregrinos son una de las aves más veloces de la Tierra; se lanzan en picado hacia sus presas a velocidades que superan los 320 kilómetros por hora. Sin embargo, podrían volar incluso más deprisa si lo hicieran en línea recta en lugar de trazar una trayectoria en espiral. El biólogo Vance A. Tucker de la Universidad Duke, de Carolina del Norte, se estuvo preguntando durante años por qué los halcones peregrinos no recorrían la distancia más corta al caer sobre sus presas, hasta que descubrió que, dado que los ojos del halcón están situados a ambos lados de la cara, para aprovechar su desarrollada visión, el halcón debe inclinar la cabeza 40 grados en ambas direcciones. Tucker descubrió mediante experimentos en túneles de aire que un bamboleo de la

cabeza de estas características reduciría considerablemente su velocidad. Los resultados de su investigación, que se publicaron en noviembre de 2000 en el *Journal of Experimental Biology*, demuestran que los halcones mantienen la cabeza recta mientras trazan una espiral logarítmica. Dadas las propiedades equiangulares de la espiral, dicha trayectoria les permite controlar visualmente a sus presas al tiempo que maximizan la velocidad.

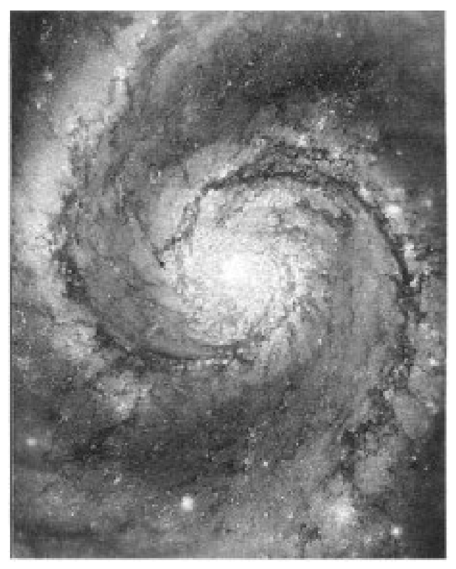


FIGURA 43

Lo más sorprendente de todo es que la misma espiral que encontramos en la foraminífera unicelular y en el girasol, y que guía el vuelo del halcón, también la encontramos en aquellos «sistemas de estrellas reunidos en un plano común, como los de la Vía Láctea» que tanto hicieron especular al filósofo Immanuel Kant (1724-1804) mucho antes de que fueran observados (figura 43). Estos sistemas se conocieron con el nombre de universos-isla: galaxias gigantes que contienen cientos de miles de millones de estrellas como el Sol. Observaciones llevadas a cabo por el Telescopio espacial Hubble revelaron que existen,

aproximadamente, cien mil millones de galaxias en nuestro universo observable, la mayoría de las cuales son galaxias espirales. Difícilmente puede pensarse en otra manifestación mejor de la gran visión expresada por el poeta, pintor y místico inglés William Blake (1757-1827) cuando escribió:

Para ver el mundo en un grano de arena,
Y el Cielo en una flor silvestre,
Abarca el infinito en la palma de tu mano
Y la eternidad en una hora.

¿Por qué tantas galaxias presentan un modelo en espiral? Las galaxias espirales como la Vía Láctea tienen un disco relativamente estrecho (como una hojuela) compuesto de gas, polvo (granos en miniatura) y estrellas. Todo el disco galáctico gira alrededor del centro de la galaxia. En las proximidades del Sol, por ejemplo, la velocidad orbital alrededor del centro de la Vía Láctea es de unos 225 kilómetros por segundo, y el material tarda unos 225 millones de años en completar un giro. A otras distancias del centro, la velocidad varía (mayor cerca del mismo, menor a más distancia), es decir, los discos galácticos no giran como un disco sólido compacto sino que lo hacen de forma diferente. Vistas de frente, las galaxias espirales muestran brazos en espiral que se originan cerca del centro galáctico y que se extienden hacia el exterior a lo largo del disco (como en la «galaxia remolino», figura 43). Los brazos en espiral forman parte del disco galáctico donde nacen muchas de las estrellas jóvenes. Como éstas son las que más brillan, podemos ver la estructura en espiral de otras galaxias desde lejos. La cuestión básica que los astrofísicos deben responder es la siguiente: ¿cómo mantienen su forma los brazos en espiral durante largos periodos de tiempo? Debido a que las partes interiores del disco rotan más rápidamente que las

exteriores, cualquier modelo a gran escala que esté de algún modo «adjunto» al material del disco (por ejemplo, las estrellas) no puede sobrevivir durante mucho tiempo. Una estructura en espiral que esté ligada siempre al mismo grupo de estrellas y nubes de gas se enrollará de manera inevitable, contrariamente a lo observado. La explicación para la longevidad de los brazos en espiral se encuentra en las *ondas de densidad* (ondas de compresión de gas que barren el disco galáctico) que presionan a las nubes de gas en su trayectoria y provocan la formación de nuevas estrellas. El modelo en espiral observado simplemente señala las partes del disco de mayor densidad que la media, así como las estrellas recién nacidas. Por tanto, se crea el modelo repetidamente sin enrollarse. Esta situación es similar a la observada cerca de un carril de una autopista cortado por obras. La densidad de coches cerca del tramo cortado es mayor porque los coches tienen que frenar. Si realizamos una fotografía aérea de larga exposición, quedará plasmada la alta densidad de tráfico cerca del lugar de las obras. Del mismo modo que la onda de densidad del tráfico no se relaciona con ningún grupo de coches en particular, el modelo de brazos en espiral no está ligado a ninguna pieza en particular del material del disco. Encontramos otra similitud en el hecho de que la onda de densidad se mueve a través del disco más lentamente que el movimiento de las estrellas y el gas, del mismo modo que la velocidad de las obras en la autopista suele ser mucho más lenta que la imperturbable velocidad de cada uno de los coches.

El agente que desvía el movimiento de las estrellas y de las nubes de gas y que genera la onda de densidad en espiral (análogo al equipo de obras que desvía los coches en movimiento hacia los otros carriles) es la fuerza gravitacional que resulta del hecho de que la distribución de la materia en

la galaxia no es perfectamente simétrica. Por ejemplo, un grupo de órbitas ovaladas alrededor de un centro (figura 44*a*) en la que cada órbita es ligeramente perturbada (rotada) por una cantidad que cambia con la distancia desde el centro da como resultado un modelo en espiral (figura 44*b*).

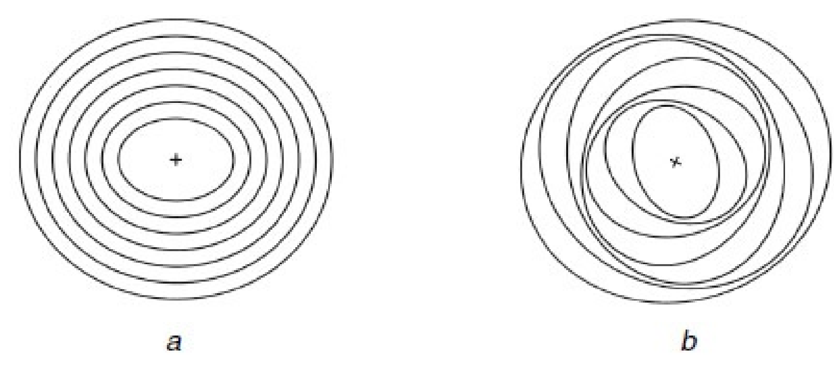


FIGURA 44

En realidad, deberíamos alegrarnos de que la fuerza de la gravedad se comporte en nuestro universo del modo en que lo hace. Según la ley universal de la gravedad de Newton, toda masa atrae a otra masa, y la fuerza de atracción decrece a medida que las masas se alejan entre sí. En concreto, al doblar la distancia, se debilita la fuerza por un factor cuatro (la fuerza decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia). Las leyes de Newton sobre el movimiento demuestran que, como resultado de esta dependencia de la distancia, las órbitas de los planetas alrededor del Sol tienen forma elíptica. Imaginen qué hubiera sucedido si hubiésemos vivido en un universo cuya gravedad decreciera por un factor ocho (en lugar de cuatro) al doblar la distancia (una fuerza decreciente inversamente proporcional al cubo de la distancia). En un universo así, las leyes de Newton predecirían que una órbita

posible de los planetas sería una espiral logarítmica. En otras palabras, o bien la Tierra se habría dirigido en espiral al Sol o bien se habría alejado en el espacio.

Leonardo Fibonacci, que inició toda esta febril actividad matemática, hoy en día ya ha sido olvidado. En la Pisa actual, hay una estatua de Fibonacci del siglo XIX en el jardín Scotto, en los terrenos de la Fortaleza Sangallo, cerca de una calle que lleva su nombre al sur del río Arno.

Desde 1963, la Fibonacci Association publica una revista que lleva el nombre de *Fibonacci Quarterly*. El grupo lo formaron los matemáticos Verner Emil Hoggatt (1921-1981) y el Hermano Alfred Brousseau (1907-1988) «para poder intercambiar ideas y estimular la investigación de los números Fibonacci y temas relacionados con ello». Quizás contrariamente a lo esperado, el *Fibonacci Quarterly* se ha convertido en una reconocida publicación sobre la teoría numérica. Como el Hermano Brousseau dijo jocosamente: «Reunimos a un grupo de gente en 1963, y como un puñado de locos empezamos una revista matemática». La Décima Conferencia Internacional sobre los Números Fibonacci y Sus Aplicaciones se fijó para el 24-28 de junio de 2002 en la Universidad del Norte de Arizona, en Flagstaff (Arizona).

Todo esto no es más que un pequeño tributo al hombre que utilizó los conejos para descubrir un concepto matemático de alcance mundial. Sin embargo, aunque la contribución de Fibonacci fue importante, la historia de la Proporción Áurea no acabó en el siglo XIII; la Europa renacentista ofrecería fascinantes descubrimientos.

6
LA PROPORCIÓN DIVINA

La búsqueda de nuestro origen es el dulce jugo de la fruta que mantiene la satisfacción en las mentes de los filósofos.

LUCA PACIOLI (1445-1517)

Hay pocos pintores en la historia que también hayan sido matemáticos de talento. Sin embargo, al hablar de «hombre del Renacimiento», nos referimos a una persona que ejemplifica el ideal renacentista dotado de una amplia cultura y de unos estudios heterogéneos. Por lo tanto, tres de los más famosos pintores renacentistas, los italianos Piero della Francesca (circa 1412-1492) y Leonardo da Vinci, y el alemán Alberto Durero, también realizaron interesantes aportaciones a las matemáticas. Quizás no les resulte sorprendente que las investigaciones matemáticas de estos tres pintores estén relacionadas con la Proporción Áurea.

El matemático más activo de este ilustre trío de pintores fue Piero della Francesca. Los escritos de Antonio Maria Graziani (cuñado del biznieto de Piero), quien compró la casa del pintor, indican que el artista nació en 1412 en Borgo San Sepolcro (hoy en día, Sansepolcro), en Italia central. Su padre, Benedetto, era un próspero curtidor y zapatero. Poco más se sabe de los primeros años de Piero, pero unos documentos recién hallados nos indican que antes de 1431 trabajó de aprendiz en el taller del pintor Antonio D'Anghiari (las obras del cual se han perdido). A finales de la década de 1430, Piero se mudó a Florencia, donde empezó a trabajar con el artista Domenico Veneziano. En Florencia, el joven artista tuvo ocasión de ver la obra de otros pintores del primer Renacimiento como Fra Angelico y Masaccio, así como las esculturas de Donatello. Quedó muy impresionado, en especial, con la serenidad de las obras

religiosas de Fra Angelico, algo que acabaría reflejándose en su propio estilo por lo que se refiere a la aplicación del color y la luz. Más adelante, todas las fases de la obra de Piero se caracterizarían por una explosión de actividad, en lugares tan diferentes como Rimini, Arezzo y Roma. Las figuras que pintó Piero, o bien están rodeadas de una solidez arquitectónica, como en la *Flagelación de Cristo* (actualmente en la Galleria Nationale delle Marche en Urbino; figura 45), o bien parecen extensiones naturales del entorno, como en *El Bautismo* (actualmente en la National Gallery de Londres; figura 46).

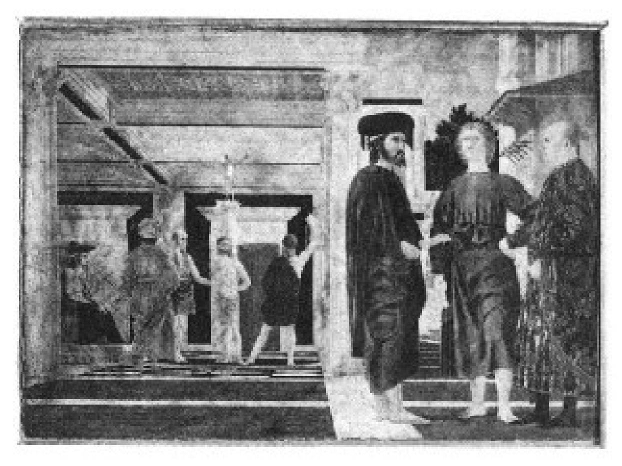


FIGURA 45



FIGURA 46

En *Vidas de los mejores pintores, arquitectos y escultores italianos*, Giorgio Vasari (1511-1574), el primer historiador del arte, señala que Piero demostró una gran capacidad matemática desde muy joven, y le atribuye «muchos» tratados matemáticos. Algunos de ellos fueron escritos cuando el pintor, debido a su avanzada edad, ya no podía dedicarse al arte. En una carta dedicatoria al duque Guidobaldo de Urbino, Piero, refiriéndose a uno de sus libros, dice que fue compuesto «para que su inteligencia no se entorpeciera con el desuso». Tres obras sobre matemáticas de Piero han llegado hasta nuestros días: *De Prospectiva pingendi* (Sobre la perspectiva en la pintura), *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* (Libro corto sobre los cinco sólidos regulares) y *Trattato d'Abaco* (Tratado sobre el ábaco).

El libro de Piero *Sobre la perspectiva* (escrito desde mediados de la década de 1470 hasta la de 1480) contiene numerosas referencias a los *Elementos* y a la *Óptica* de Euclides, ya que su intención era la de demostrar que la técnica para lograr la perspectiva en pintura tenía una sólida

base científica respecto a la percepción visual. En sus propios cuadros, la perspectiva ofrece un recipiente espacioso en completa consonancia con las figuras que contiene. De hecho, para Piero la pintura era principalmente «la demostración en un plano de cuerpos de tamaños crecientes o decrecientes». Esto se manifiesta de un modo magnífico en la *Flagelación* (figuras 45 y 47), una de las pocas pinturas renacentistas con una construcción de la perspectiva meticulosamente determinada. Según el artista contemporáneo David Hockney en su libro *Secret Knowledge*, publicado en 2001, Piero pinta «como cree que las figuras tienen que estar, no como las ve».

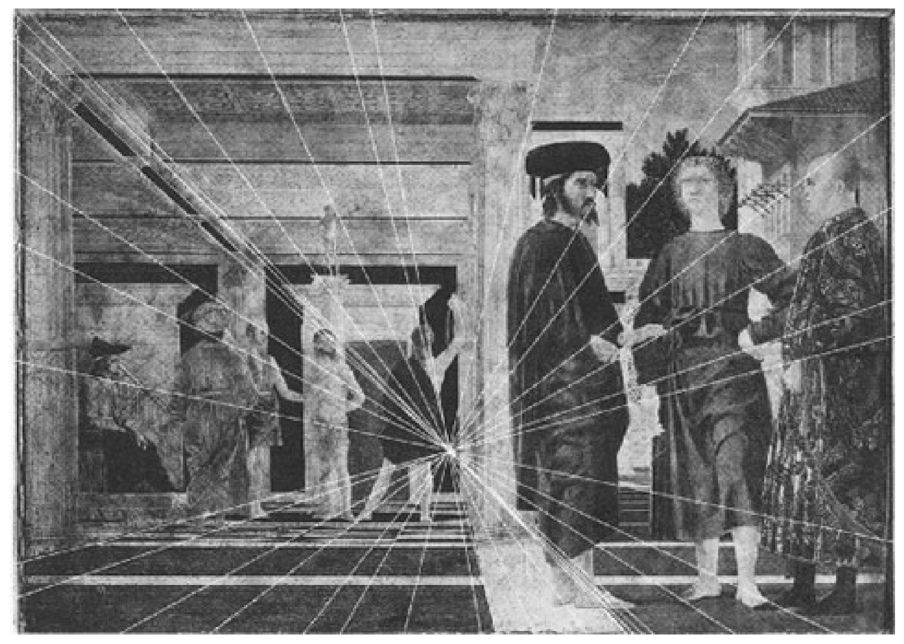


FIGURA 47

Con ocasión del 500º aniversario de la muerte de Piero, los investigadores Laura Geatti, de la Universidad de Roma, y Luciano Fortunati, del Instituto de Investigación Nacional de Pisa, realizaron un análisis detallado asistido por ordenador de la *Flagelación*. Digitalizaron la imagen al

completo, determinaron las coordenadas de todos los puntos, midieron las distancias y llevaron a cabo un completo análisis de la perspectiva mediante cálculos algebraicos. Esto les permitió determinar la ubicación del «punto de fuga», en el cual convergen todas las líneas que se apartan directamente del espectador (figura 47), y que Piero utilizó para conseguir la impresionante «profundidad» de su pintura.

El lúcido libro de Piero sobre la perspectiva se convirtió en el manual de los que intentaban pintar figuras planas y sólidas, y los aspectos menos matemáticos (y más accesibles) del tratado se incorporaron a obras posteriores sobre perspectiva. Vasari asegura que gracias a la sólida formación matemática de Piero, «éste entendía mejor que nadie todas las curvas de los cuerpos regulares, y estaba en deuda con él por la luz que arrojó al tema». La figura 48 nos muestra un ejemplo del cuidadoso análisis de Piero sobre cómo dibujar un pentágono en perspectiva.

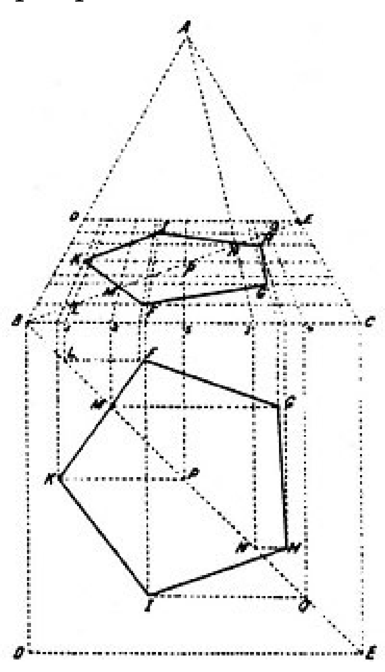


FIGURA 48

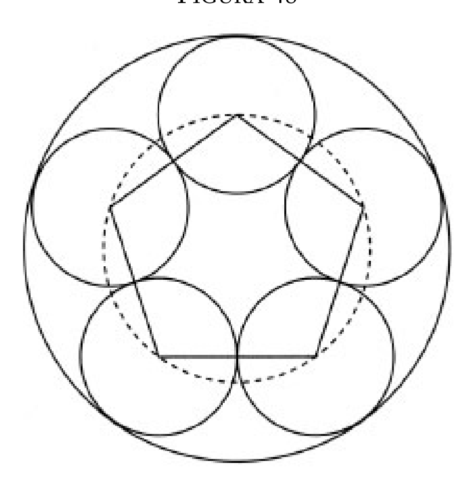


FIGURA 49

Tanto en el *Tratado sobre el ábaco* como en *Los cinco sólidos regulares*, Piero nos muestra una amplia gama de problemas (y sus soluciones) sobre el pentágono y los cinco sólidos platónicos. Calcula las longitudes de los lados y de las diagonales, las áreas y los volúmenes. Muchas de las soluciones incluyen la Proporción Áurea, y algunas técnicas de Piero dan fe de un pensamiento innovador y original.

Como Fibonacci antes que él, Piero escribió el *Tratado sobre el ábaco*, en primer lugar, para proporcionar a los mercaderes de la época una serie de recetas aritméticas y de reglas geométricas. En un mundo comercial que carecía de un sistema único de pesos y medidas, o de un acuerdo sobre el tamaño o la forma de los recipientes, era imprescindible tener la habilidad para calcular los volúmenes de las figuras. Sin embargo, la curiosidad matemática de Piero le llevó más allá de las aplicaciones cotidianas. Por tanto, en sus libros encontramos problemas «inútiles», como, por ejemplo, calcular la cara de un octaedro inscrito dentro de un cubo, el diámetro de cinco círculos pequeños inscritos dentro de un

círculo de diámetro conocido (figura 49). La solución de este último resulta ser un pentágono y, por tanto, la Proporción Áurea.

Gran parte de la obra algebraica de Piero se incorporó a un libro publicado por Luca Pacioli (1445-1517) y titulado *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Recopilación de conocimiento sobre aritmética, geometría, proporción y proporcionalidad). La mayor parte de la obra de Piero sobre los sólidos, que apareció en latín, la tradujo Luca Pacioli al italiano, incorporándola de nuevo (o plagiándola, como dicen muchos con menos tacto) en su famoso libro sobre la Proporción Áurea: *Divina Proportione* (La Proporción Divina).

¿Quién era Luca Pacioli, este controvertido matemático? ¿Se trata del mayor plagiador de todos los tiempos o el mejor comunicador de las matemáticas?

¿EL HÉROE OLVIDADO DEL RENACIMIENTO?

Luca Pacioli nació en 1445 en Borgo San Sepolcro (la misma ciudad toscana donde nació y tenía su taller Piero della Francesca). De hecho, Pacioli recibió sus primeras enseñanzas en el taller de Piero. Sin embargo, a diferencia de otros estudiantes que demostraban una habilidad especial para la pintura, y algunos como Pietro Perugino destinados a convetirse en grandes artistas, Pacioli destacaba como promesa de las matemáticas. Piero y Pacioli mantuvieron una estrecha relación más adelante en su vida, como se adivina por el hecho de que Piero incluyó un retrato de Pacioli, como San Pedro Mártir, en un cuadro de *Madonna con Niño, Santos y Ángeles*. Pacioli se trasladó a vivir a Venecia cuando todavía era relativamente joven y allí se convirtió en el tutor de los tres hijos de un acaudalado

mercader. En Venecia prosiguió sus estudios matemáticos (bajo la tutela del matemático Domenico Bragadino) y escribió su primer libro de texto sobre aritmética.

En la década de 1470 Pacioli estudió teología y fue ordenado fraile franciscano. Por esta razón normalmente se hace referencia a él con el nombre de Fra Luca Pacioli. Durante los años siguientes viajó muchísimo, enseñando matemáticas en las universidades de Perugia, Zara, Nápoles y Roma. Es posible que por esas fechas también hubiera ejercido como tutor de Guidobaldo de Montefeltro, quien se convertiría en el Duque de Urbino en 1482.

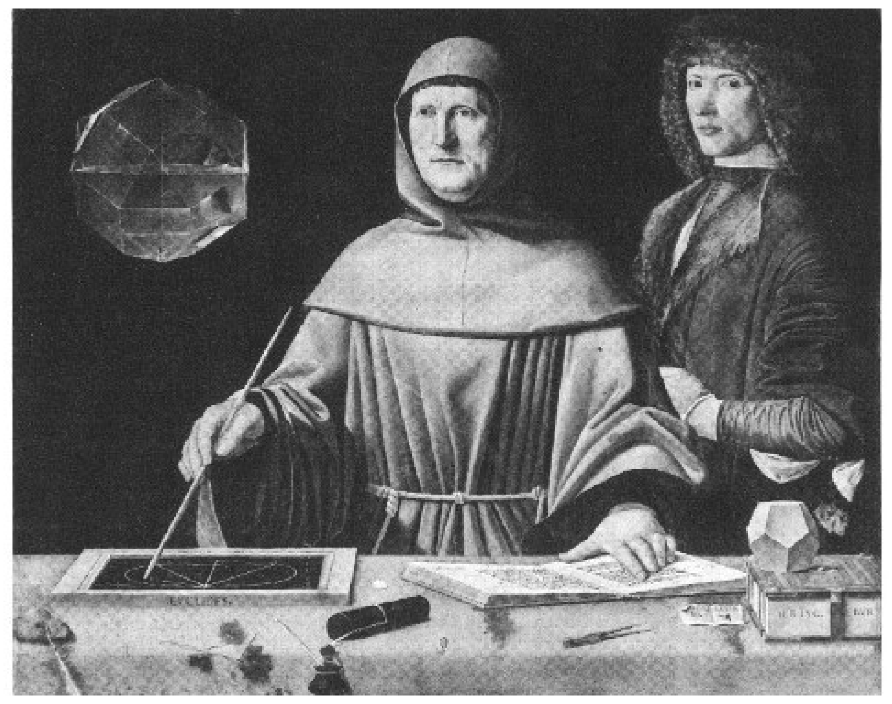


FIGURA 50

En el que debe ser el mejor retrato de un matemático que jamás se haya pintado, Jacopo de'Barbari (1440-1515) nos muestra a Luca Pacioli dando una lección de geometría a uno de sus alumnos (figura 50; la obra se encuentra actualmente en la Galleria Nazionale Di Capodimonte en

Nápoles). En él puede observarse uno de los sólidos platónicos, un dodecaedro, sobre el libro de Pacioli, *Summa*. El mismo Pacioli, vestido con su indumentaria de fraile y con la apariencia de un sólido geométrico, aparece copiando un diagrama del volumen XIII de los *Elementos* de Euclides. Cuelga en el aire un poliedro transparente, conocido como rombicuboctaedro (uno de los Sólidos de Arquímedes, de veintiséis caras dieciocho de las cuales son cuadrados y ocho son triángulos equiláteros), lleno de agua hasta la mitad, y que simboliza la pureza y la intemporalidad de las matemáticas. El artista logró captar las reflexiones y refracciones de este poliedro de cristal con una habilidad extraordinaria. La identidad de la otra persona del cuadro ha sido tema de discusión. Una de las teorías defiende que podría tratarse del Duque Guidobaldo. En 1993, al matemático británico Nick MacKinnon se le ocurrió una posibiliad interesante. En un artículo muy elaborado titulado «The Portrait of Fra Luca Pacioli» (Retrato de Fra Luca Pacioli) aparecido en la *Mathematical Gazette*, MacKinnon señala que la figura es la del famoso pintor alemán Alberto Durero, quien poseía un enorme interés por la geometría y la perspectiva (y sobre cuya relación con Pacioli volveremos más adelante en este mismo capítulo). Ciertamente, el rostro del estudiante guarda un parecido asombroso con el del autorretrato de Durero.

Después de que el Papa le hubiera otorgado privilegios especiales, Pacioli regresó a Borgo San Sepolcro en 1489, pero se encontró con los celos del clero que incluso provocaron la prohibición de que Pacioli enseñara durante dos años. En 1494, Pacioli regresó a Venecia para publicar *Summa*, obra que dedicó al Duque Guidobaldo. *Summa*, obra enciclopédica tanto por su naturaleza como por su alcance (de unas 600 páginas), reunía el conocimiento

matemático de la época en aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. En este libro, Pacioli toma prestado con bastante libertad (normalmente con el consecuente reconocimiento) problemas sobre el icosaedro y el dodecaedro del *Trattato* de Piero y problemas sobre álgebra y geometría de Fibonacci y de otros. Pacioli identifica a Fibonacci como su principal fuente, señalando que cuando no se cita a otro, la obra pertenece a Leonardus Pisanus. Una parte interesante de la *Summa* es la que trata de la contabilidad de doble-entrada, un método para llevar las cuentas que indica de dónde viene el dinero y a dónde va. Aunque Pacioli no inventó este sistema —se dedicó a sintetizar las prácticas de los mercaderes venecianos del Renacimiento—, se considera el primer libro que se publicó sobre contabilidad. El deseo de Pacioli de «dar al comerciante, sin demora, la información sobre los activos y pasivos» le otorgó el título de «Padre de la Contabilidad», y provocó que en 1994 contables de todo el mundo celebraran (en Sansepolcro, como se denomina la ciudad hoy en día) el 500º aniversario de la *Summa*.

En 1480, Ludovico Sforza se convirtió en Duque de Milán. De hecho, tan sólo se convirtió en el regente del auténtico duque, de siete años de edad, tras un episodio de intriga política y asesinato. Con la firme disposición a hacer de su corte el hogar de estudiosos y artistas, Ludovico invitó a Leonardo da Vinci en 1482 como «pintor e ingeniero del duque». Leonardo tenía un notable interés por la geometría, especialmente por sus aplicaciones prácticas en mecánica. En sus propias palabras: «La mecánica es el paraíso de las ciencias matemáticas; por medio de ella, uno obtiene los frutos de las matemáticas». Por consiguiente, fue probablemente Leonardo quien indujo al duque a invitar a Pacioli a unirse a la corte como profesor de matemáticas en

1496. No hay duda de que Leonardo aprendió parte de geometría de Pacioli, y aquél contagió a éste un mayor aprecio por el arte.

Durante su estancia en Milán Pacioli completó un tratado en tres volúmenes, *Divina Proportione* (La Proporción Divina), que publicó más tarde en Venecia en 1509. El primer volumen, *Compendio de Divina Proportione* (Compendio de la Proporción Divina), contiene un resumen detallado de las propiedades de la Proporción Áurea (a la que Pacioli se refiere como «Proporción Divina»), así como un estudio de los sólidos platónicos y otros poliedros. En la primera página de *La Proporción Divina*, Pacioli declara de un modo grandilocuente que ésta es «una obra necesaria para todas las mentes perspicaces y curiosas, en la que todo aquel que ame el estudio de la filosofía, la perspectiva, la pintura, la escultura, la arquitectura, la música y otras disciplinas matemáticas, se encontrará con una enseñanza muy delicada, sutil y admirable, y se regocijará con las diversas cuestiones de una ciencia muy secreta».

Pacioli dedicó el primer volumen de *La Proporción Divina* a Ludovico Sforza y, en el quinto capítulo, ofrece cinco razones por las que cree que *La Proporción Divina* debería ser el nombre apropiado para la Proporción Áurea.

1. «Es una y nada más que una». Pacioli compara el valor único de la Proporción Áurea al hecho de que la unidad «es el epíteto supremo de Dios».
2. Pacioli encuentra una similitud entre el hecho de que la definición de la Proporción Áurea comprenda tres longitudes (*AC*, *CB* y *AB* en la figura 24) y la existencia de la Santísima Trinidad: Padre, Hijo y Espíritu Santo.

3. Para Pacioli, la incomprensibilidad de Dios y el hecho de que la Proporción Áurea sea un número irracional son equivalentes. En palabras suyas: «Del mismo modo que Dios no puede ser definido ni comprendido con palabras, nuestra proporción no puede designarse con múmeros inteligibles ni expresarse con ninguna cantidad racional, sino que ha de permanecer escondida y en secreto, y es denominada irracional por los matemáticos».
4. Pacioli compara la omnipresencia y la invariabilidad de Dios con la auto-similitud asociada a la Proporción Áurea, es decir, el valor es siempre el mismo y no depende de que se divida la longitud de la línea o del tamaño del pentágono en que se calculen las proporciones de las longitudes.
5. La quinta razón nos revela una visión de la existencia más platónica que la del mismo Platón. Pacioli afirma que, del mismo modo que Dios creó todo el cosmos a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro, la Proporción Áurea crea el dodecaedro, ya que no puede construirse sin la Proporción Áurea. Añade que sin la Proporción Áurea es imposible comparar los otros cuatro sólidos platónicos (que representan la tierra, el agua, el aire y el fuego) entre sí.

En el mismo libro, Pacioli no deja de ponderar las propiedades de la Proporción Áurea. Analiza, uno detrás de otro, lo que llama los trece «efectos» diferentes de la «Proporción Divina», calificando cada uno de estos «efectos» con adjetivos como «esencial», «singular», «maravilloso», «supremo», etc. Por ejemplo, considera «incomprensible» el «efecto» según el cual los «Rectángulos Áureos» pueden inscribirse en el icosaedro (figura 22). Pacioli se detiene en

el «efecto» número trece, al concluir que «la lista debe finalizar, por la salvación», ya que había trece hombres sentados en la mesa de La Última Cena.

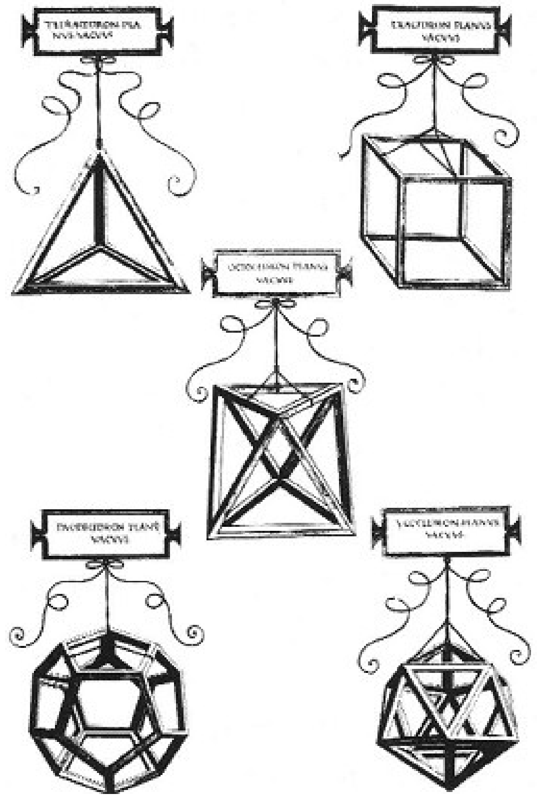


FIGURA 51

No cabe duda que Pacioli tenía un gran interés por las artes y de que su interés en *La Proporción Divina* pretendía, en parte, perfeccionar su base matemática. La frase de la primera página del libro expresa su deseo de revelar a los artistas, mediante la Proporción Áurea, el «secreto» de las formas armónicas. Para asegurar el atractivo del libro, Pacioli consiguió para *La Proporción Divina* los servicios del ilustrador soñado por cualquier autor: el mismísimo

Leonardo da Vinci se encargó de las sesenta ilustraciones de sólidos, dibujando tanto la estructura (figura 51) como la forma sólida (figura 52).

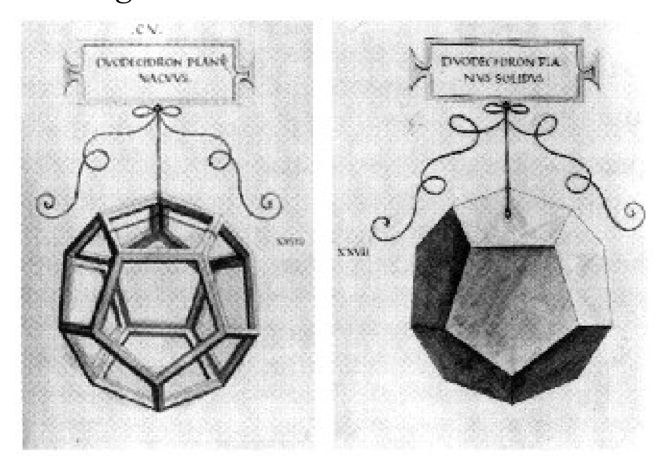


FIGURA 52

Pacioli se apresuró a expresarle su agradecimiento. Escribió lo siguiente sobre la contribución de Leonardo: «El mejor pintor de perspectiva, arquitecto, músico, el hombre dotado de todas las virtudes, Leonardo da Vinci, que dedujo y elaboró una serie de diagramas de sólidos regulares». Sin embargo, el propio texto se queda algo corto por lo que se refiere a sus elevados objetivos. Aunque el libro empieza con unas florituras sensacionales, continúa con un conjunto más bien convencional de fórmulas matemáticas envueltas en definiciones filosóficas.

El segundo libro de *La Proporción Divina* es un tratado sobre la proporción y su aplicación en la arquitectura y estructura del cuerpo humano. El tratamiento de Pacioli se basaba en su mayor parte en la obra del ecléctico arquitecto romano Marcus Vitruvius Pollio (circa 70-25 a.C.), quien escribió:

> …en el cuerpo humano el punto central es, naturalmente, el ombligo. Ya que si se coloca un hombre estirado, con manos y pies extendidos, y un par de compases centrados en el ombligo, los dedos de manos y pies tocarán la

circunferencia del círculo que describen desde el mismo. Además, del mismo modo que el cuerpo describe un diagrama circular, también se puede describir un cuadrado a partir del mismo. Ya que, al medir la distancia desde la planta de los pies hasta la cabeza, y aplicando la medida obtenida a la de los brazos estirados, la anchura será igual a la altura, como en el caso de las figuras planas que son perfectamente cuadradas.

Los estudiosos renacentistas consideraron el pasaje anterior como una demostración más del nexo entre la base geométrica y orgánica de la belleza, lo que llevó al concepto del «hombre vitruviano» que Leonardo dibujó con gran belleza (figura 53; actualmente en la Galleria dell'Accademia, Venecia).

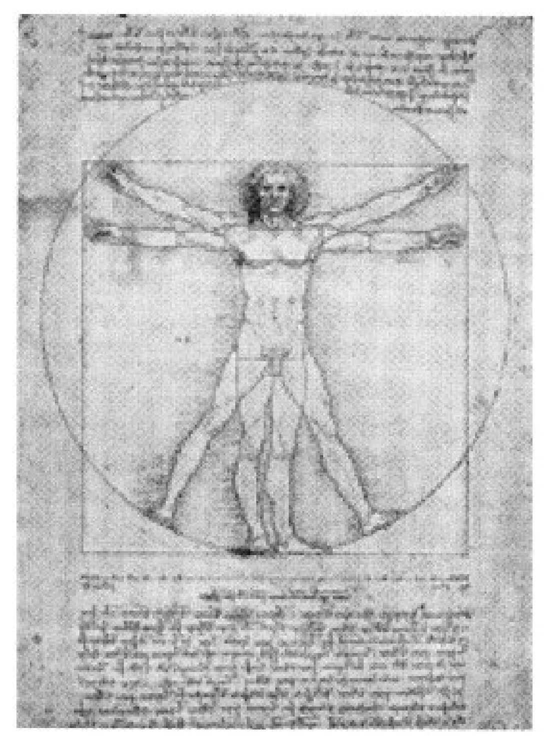


FIGURA 53

Por esta razón, el libro de Pacioli también empieza con un debate sobre las proporciones del cuerpo humano, «ya que en el cuerpo humano se puede hallar toda clase de proporciones y de proporcionalidades, realizadas a voluntad

del Altísimo a través de los misterios ocultos de la naturaleza». Sin embargo, contrariamente a las frecuentes aseveraciones halladas en la literatura, Pacioli no insiste en que la Proporción Áurea determine las proporciones de toda obra de arte. Cuando se trata del diseño y de la proporción, Pacioli defiende específicamente el sistema vitruviano, basado en proporciones simples (racionales). El autor Roger Herz-Fischler descubrió la falacia según la cual la Proporción Áurea era el canon de Pacioli, falsedad proclamada por los matemáticos franceses Jean Etienne Montucla y Jérôme de Lalande en su edición de 1799 de la *Historie de Mathématiques* (Historia de las matemáticas).

El tercer volumen de la *Divina* (un pequeño libro dividido en tres tratados parciales sobre los cinco cuerpos regulares) es básicamente una traducción italiana, palabra por palabra, de los *Cinco Sólidos Regulares* de Piero escrita en latín. El hecho de que Pacioli no reconociera, en ningún pasaje del texto, que no era más que el traductor del libro, provocó una airada denuncia por parte del historiador del arte Giorgio Vasari. Vasari escribe sobre Piero della Francesca:

> … se le consideraba un gran maestro de los problemas de los sólidos regulares, tanto aritméticos como geométricos, pero no pudo dar a conocer sus brillantes investigaciones ni los muchos libros que escribió debido a la ceguera que sufrió en los últimos años de su vida y a su muerte. El hombre que debería haber puesto todo su empeño en dar a conocer la reputación y fama de Piero, ya que le había enseñado todo lo que sabía, trató de borrar de un modo vergonzoso y malvado el nombre de su maestro y usurpar para sí el honor que pertenecía del todo a Piero; ya que publicó con su propio nombre, Fra Luca dal Borgo (Pacioli), todas las investigaciones llevadas a cabo por ese anciano admirable, que no sólo fue un gran pintor sino también un experto en ciencias.

¿Plagió Pacioli? Posiblemente, aunque en *Summa* le rindió homenaje a Piero, a quien consideró «el monarca pintor de nuestros tiempos» y alguien que «resulta familiar

por su exhaustivo libro sobre el arte pictórico y la fuerza de la línea en la perspectiva».

En 1942, R. Emmett Taylor (1889-1956) publicó un libro titulado *No Royal Road: Luca Pacioli and His Times*, donde adopta una aptitud comprensiva con Pacioli, argumentando que, por lo que se refiere al estilo, Pacioli pudo no haber tenido nada que ver con el tercer libro de la *Divina* y que era un añadido a la obra de Pacioli.

Sea cual sea la verdad, es indudable que si no hubiera sido por los libros *impresos* de Pacioli, las ideas de Piero sobre las construcciones matemáticas (que no se llegaron a publicar impresas) no habrían tenido la difusión que finalmente tuvieron. Más aún, hasta la época de Pacioli, la Proporción Áurea era conocida tan sólo con unos nombres bastante intimidatorios, como «proporción media y extrema» o «proporción con un medio y dos extremos», y el concepto era sólo conocido por los matemáticos. La publicación de *La Proporción Divina* en 1509 impulsó un nuevo interés por la Proporción Áurea. Este concepto podía considerarse desde una nueva perspectiva porque su publicación en forma de libro la hacía digna de respeto. Al otorgarle un significado teológico/filosófico al *nombre* («*Proporción Divina*») también situó a la Proporción Áurea como un tema matemático en el que un grupo cada vez mayor de intelectuales podía ahondar. Finalmente, con el libro de Pacioli, la Proporción Áurea empezó a ser asequible a los artistas mediante tratados teóricos no demasiado matemáticos.

Los dibujos de poliedros de Leonardo da Vinci para *La Proporción Divina*, trazados (según Pacioli) con su «indescriptible mano izquierda», tuvieron un gran impacto. Probablemente se trataba de las primeras ilustraciones de esqueletos de sólidos que permitían una fácil distinción

visual entre la parte frontal y trasera. Puede que Leonardo hubiera dibujado los poliedros a partir de una serie de modelos de madera, ya que los archivos del Ayuntamiento de Florencia indican que se compraron una serie de modelos de madera de Pacioli para una exposición pública. Además de los diagramas para la obra de Pacioli, se encuentran bocetos de muchos sólidos dispersos entre las anotaciones de Leonardo, entre los que figuran una construcción geométrica aproximada del pentágono. Esta fusión de arte y matemáticas alcanza su clímax en el *Tratatto della pittura* (Tratado sobre pintura; organizado por Francesco Melzi, heredero de los manuscritos de Leonardo), que se abre con la siguiente advertencia: «Que nadie que no sea matemático lea mis obras». ¡Semejante proclama no la encontraremos en ningún manual de arte contemporáneo!

Los dibujos de sólidos en la *Divina* han inspirado también algunos de los *intarsia* construidos por Fra Giovanni da Verona alrededor de 1520. La intarsia representa una forma especial de arte, en la que se construyen complicados mosaicos planos a partir de trozos de madera de marquetería. Las tablas de intarsia de Fra Giovanni incluyen un icosaedro que seguramente Leonardo utilizó como plantilla para su dibujo del esqueleto del mismo.

Las vidas de Leonardo y de Pacioli continuaron entrelazadas incluso hasta después de finalizar *La Proporción Divina*. En octubre de 1499 ambos huyeron de Milán tras la caída de la ciudad a manos del ejército francés dirigido por el Rey Luis XII. Tras breves estancias en Mantua y Venecia, se instalaron en Florencia durante un tiempo. Durante el periodo en el que duró su amistad, el nombre de Pacioli se asoció con las otras dos grandes obras matemáticas: una

traducción al latín de los *Elementos* de Euclides y una obra no publicada sobre matemáticas lúdicas. La traducción de Pacioli de los *Elementos* era una edición anotada basada en una traducción anterior de Campanus de Novara (1220-1296) que apareció en edición impresa en Venecia en 1482 (y que fue la primera versión *impresa*). Pacioli no logró publicar su colección de problemas de matemáticas lúdicas y proverbios *De Viribus Quantitatis* (Los poderes de los números) antes de su muerte en 1517. Dicha obra era un proyecto de colaboración entre Pacioli y Leonardo, y las mismas notas de Leonardo contienen muchos de los problemas de *De Viribus*.

Es cierto que Fra Luca Pacioli no puede ser recordado por su originalidad, pero no puede negarse su influencia en el desarrollo de las matemáticas en general y en la historia de la Proporción Áurea en particular.

MELANCOLÍA

Otra de las grandes figuras del Renacimiento con un perspicaz interés artístico y matemático es Alberto Durero.

Durero es considerado por muchos como el mayor artista alemán del Renacimiento. Nació el 21 de mayo de 1471 en la Ciudad Libre Imperial de Nurenberg y su padre era un joyero muy laborioso. Cuando contaba con diecinueve años ya demostraba tener una habilidad como pintor y como grabador que incluso superaba la de su maestro, el pintor e ilustrador de libros de Nurenberg Michael Wolgemut. Por esta razón, Durero se embarcó en un viaje de cuatro años en el que se convenció de que las matemáticas, «las más precisas, lógicas y gráficamente constructivas de todas las ciencias», tenían que ser un ingrediente importante del arte.

Por consiguiente, tras una breve estancia en Nurenberg, en la que se casó con Agnes Frey, hija de un artesano de éxito, marchó hacia Italia, con el objetivo de expandir tanto sus horizontes artísticos como matemáticos. Parece que lo consiguió en su visita a Venecia en 1494-1495. El encuentro de Durero con el fundador de la Escuela Veneciana de pintura, Giovanni Bellini (circa 1426-1516), parece que marcó profundamente al joven artista, cuya admiración por Bellini persistió durante toda su vida. A su vez, el encuentro de Durero con Jacopo de'Barbari, autor del magnífico retrato de Luca Pacioli (figura 50), le puso en contacto con la obra matemática de Pacioli y de su relevancia en el arte. Concretamente, de'Barbari mostró a Durero dos figuras, masculina y femenina, construidas con métodos geométricos y la experiencia motivó a Durero a investigar el movimiento humano y las proporciones. Es probable que Durero coincidiera con el propio Pacioli en Bolonia durante su segunda visita a Italia de 1505 a 1507. En una carta fechada en ese periodo, describe su visita a Bolonia como «provocada por el arte, ya que hay alguien que me instruirá en el arte secreto de la perspectiva». Muchos han interpretado que el misterioso «alguien» de Bolonia era Pacioli, aunque también se han sugerido los nombres del impresionante arquitecto Donato di Angelo Bramante (1444-1514) y del teórico arquitectónico Sebastiano Serlio (1475-1554). En el transcurso de este viaje, Durero también se encontró con Jacopo de'Barbari. Sin embargo, esta segunda visita pudo estar marcada por el nerviosismo, tal vez paranoico, de Durero, quien creía que otros artistas podían dañarle al sentir envidia de su fama. Por ejemplo, rechazó invitaciones a cenas por temor a ser envenenado.

A partir de 1495, Durero empezó a mostrar un serio interés por las matemáticas. Pasó mucho tiempo estudiando los *Elementos* (una traducción latina que obtuvo en Venecia, a pesar de que hablaba poco latín), las obras de Pacioli sobre matemáticas y arte, y las importantes obras sobre arquitectura, proporción y perspectiva del arquitecto romano Vitruvius y del arquitecto y teórico italiano Leon Baptista Alberti (1404-1472).

Las contribuciones de Durero a la Proporción Áurea están tanto por escrito como presentes en su arte. Su mayor tratado, *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* (Tratado sobre la medida con regla y compás), se publicó en 1525 y fue uno de los primeros libros sobre matemáticas escrito en alemán. Durero se queja de que hay demasiados artistas que ignoran la geometría «sin la cual uno no puede ser o convertirse en un artista absoluto». En el primero de los cuatro libros del *Tratado* nos describe con detalle la construcción de varias curvas, incluida la espiral logarítmica (o equiangular), que está íntimamente relacionada con la Proporción Áurea, como ya hemos visto. El segundo libro contiene métodos aproximados y precisos para la construcción de muchos polígonos, incluidas dos construcciones del pentágono (uno exacto y otro aproximado). Los sólidos platónicos y otros sólidos, algunos inventados por Durero, junto a la teoría de la perspectiva y de las sombras, se discuten en el cuarto libro. El libro de Durero no pretendía ser un libro de texto sobre geometría (por ejemplo, sólo ofrece una demostración). En cambio, Durero empieza siempre con una aplicación práctica y continúa con una exposición de los aspectos teóricos más básicos. El libro contiene algunas de las más tempranas representaciones de redes de poliedros. Se trata de hojas sencillas sobre las que se dibujan las superficies de los

poliedros de tal modo que las figuras pueden recortarse (como piezas individuales) y doblarse para formar sólidos de tres dimensiones.

La ilustración de Durero para la red del dodecaedro (relacionada como sabemos con la Proporción Áurea) se muestra en la figura 54.

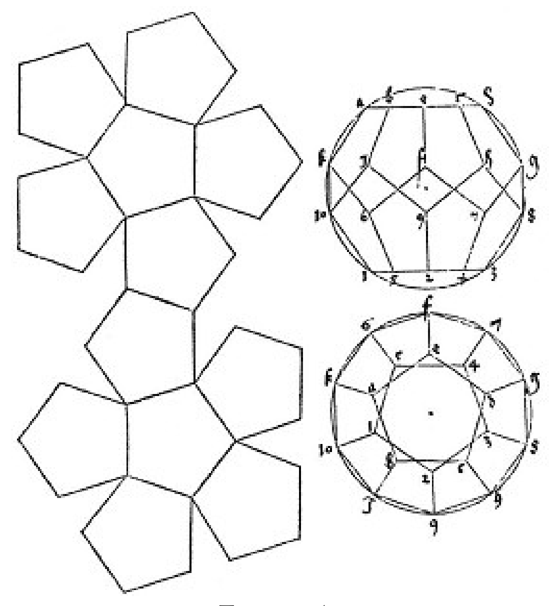


FIGURA 54

Durero mezcló el virtuosismo en los grabados y en el grabado sobre madera, con su interés por las matemáticas en la enigmática alegoría *Melancolía I* (figura 55). Se trata de uno de un total de tres grabados maestro (los otros dos son *Caballero, Muerte y Demonio* y *San Jerónimo en su estudio*). Se ha dicho que Durero creó esta pintura en un ataque de melancolía tras la muerte de su madre. La figura central en *Melancolía* es una figura femenina con alas sentada, apática y alicaída, sobre una losa de piedra. En su mano derecha sostiene un compás, abierto para medir. La mayoría de los objetos en el grabado tienen múltiples significados simbólicos, y se han dedicado artículos enteros a desentrañar

su interpretación. El cazo al fuego en la mitad izquierda y la balanza se cree que representan la alquimia. El «cuadrado mágico» en la parte superior derecha (en el que cada fila, columna, diagonal, los cuatro números centrales, y los números de las cuatro esquinas suman 34; por cierto, un número Fibonacci) se supone que representa las matemáticas (figura 56). Las entradas del medio de la última fila hacen 1514, la fecha del grabado. La inclusión del cuadrado mágico es, con toda probabilidad, influencia de Pacioli, ya que el *De Viribus* de Pacioli incluía una colección de cuadrados mágicos. El sentido principal de la obra, con sus figuras geométricas, llaves, murciélago, mar, etcétera, parece ser la representación de la melancolía que envuelve al artista o pensador, entre las dudas del éxito de sus empresas, mientras el tiempo, representado por el reloj de arena en la parte superior, continúa en su avance.

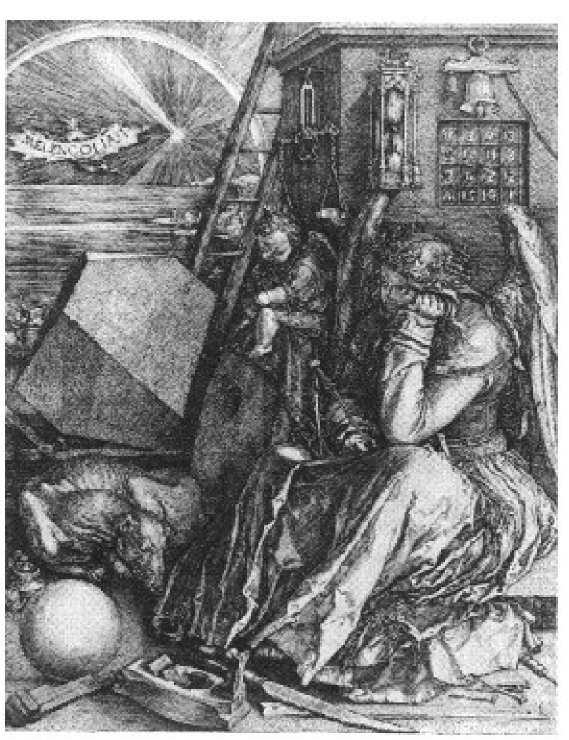


FIGURA 55

El extraño sólido que aparece en la mitad izquierda del grabado ha sido objeto de un serio debate y de varios intentos de reconstrucción. A primera vista, parece un cubo del que se han cortado dos esquinas opuestas (lo que inspiró algunas interpretaciones freudianas), pero no parece que sea así. La mayoría de los investigadores creen que se trata de una figura conocida como rombodoedro (un sólido de seis caras con cada una de ellas en forma de rombo; figura 57) truncado para que pueda ser circunscrito a una esfera. Al encontrarse sobre una de sus caras triangulares, su parte frontal encaja perfectamente dentro del cuadrado mágico. Los ángulos en la cara del sólido también han sido objeto de debate. Mientras muchos sugieren 72 grados, que lo relacionaría con la Proporción Áurea (ver figura 25), el cristalógrafo holandés C. H. MacGillavry llegó a la conclusión, basándose en el análisis de la perspectiva, de que los ángulos son de 80 grados. Las sorprendentes cualidades de este sólido se resumen con gran belleza en un artículo de T. Lynch que apareció en 1982 en el *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*. El autor concluye: «Dado que la representación de los poliedros se consideraba uno de los problemas principales de la geometría de la perspectiva, ¿qué mejor manera de demostrar su habilidad en este campo podía tener Durero que incluir en un grabado una forma que fuera tan novedosa, y quizás única, y dejar que otros especialistas en geometría respondieran a la pregunta de qué es y de dónde viene?».

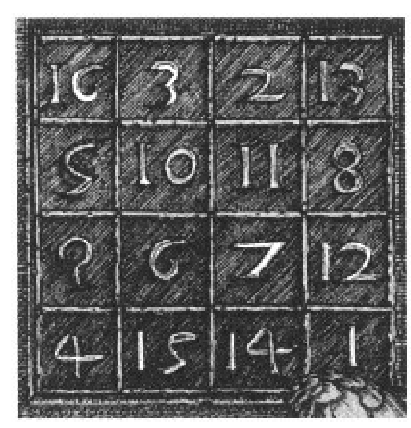


FIGURA 56

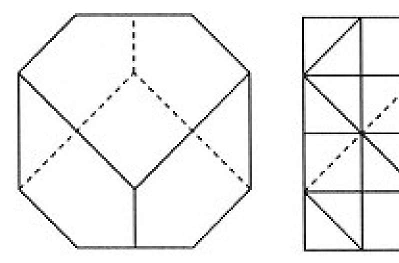


FIGURA 57

Exceptuando la influyente obra de Pacioli, así como las interpretaciones matemático-artísticas de los pintores Leonardo y Durero, el siglo XIX no aportó ningún otro desarrollo sorprendente en lo que se refiere a la Proporción Áurea. Aunque unos pocos matemáticos, incluyendo al italiano Rafael Bombelli (1526-1572) y al español Francisco Flussates Candalla (1502-1594), utilizaron la Proporción Áurea en una serie de problemas relacionados con el pentágono y los sólidos platónicos, las aplicaciones más interesantes no aparecieron hasta final de siglo.

Sin embargo, las obras de Pacioli, Durero y otros revivieron el interés por el platonismo y pitagorismo. De pronto, los intelectuales del Renacimiento vieron una auténtica oportunidad para relacionar las matemáticas y la lógica racional con el universo que les rodeaba mediante el espíritu universal platónico. Conceptos como la «Proporción

Divina» crearon, por un lado, un puente entre las matemáticas y el funcionamiento del cosmos y, por otro lado, una relación entre la física, la teología y la metafísica. La persona que, tanto en sus ideas como en sus obras, ejemplifica más que cualquier otra esta fascinante mezcla entre matemáticas y misticismo es Johannes Kepler.

MISTERIUM COSMOGRAFICUM

Johannes Kepler es más conocido como astrónomo excepcional, responsable (entre otras cosas) de las tres leyes del movimiento planetario que llevan su nombre. Pero Kepler también era un matemático de talento, un metafísico especulativo y un autor prolífico. Nacido en una época de grandes transformaciones políticas y de caos religioso, la educación, la vida y el pensamiento de Kepler se formaron a partir de los acontecimientos que le rodearon. Kepler nació el 27 de diciembre de 1571 en la ciudad libre imperial de Weil der Stadt, Alemania, en casa de su abuelo Sebald. Su padre, Heinrich, soldado mercenario, estuvo ausente durante la mayor parte de su infancia y, en palabras de Kepler, durante sus cortas visitas era: «un malhechor, brusco y pendenciero». El padre abandonó el hogar cuando Kepler tenía dieciséis años y jamás lo volvió a ver. Se dice que participó en una batalla naval en el bando del Reino de Nápoles y que murió cuando regresaba a casa. Por tanto, Kepler fue criado principalmente por su madre, Katharina, quien trabajaba en el hostal de su padre. La propia Katharina era una mujer extraña y desagradable, que recogía hierbas y creía en sus poderes curativos mágicos. En 1620, una serie de acontecimientos relacionados con rencillas personales, habladurías desafortunadas y la avaricia, concluyeron con su arresto, acusada de brujería, cuando contaba edad avanzada. En aquella época tales acusaciones

eran habituales: entre los años 1615 y 1629, treinta y ocho mujeres fueron ejecutadas acusadas de brujería en Weil der Stadt. Kepler, quien por aquel entonces ya era muy conocido, reaccionó ante la noticia del juicio de su madre «con una pena indescriptible». El propio Kepler se hizo cargo de la defensa, reclutando personal de la facultad de Derecho de la Universidad de Tubinga. Los cargos contra Katharina Kepler fueron eventualmente retirados tras un largo sufrimiento, principalmente gracias a su propio testimonio bajo amenaza de gran dolor y tortura. Esta historia resume la atmósfera y la confusión intelectual existente durante el periodo en que Kepler desarrolló su obra científica. Kepler nació en una sociedad que había presenciado (tan sólo hacía cincuenta años) el cisma de Martín Lutero con la Iglesia Católica, quien había proclamado que los seres humanos sólo debían justificarse ante Dios a través de la fe. Aquella sociedad también estaba a punto de embarcarse en el sangriento y demente conflicto conocido como la Guerra de los Treinta Años. Debería sorprendernos que, con semejante trasfondo y la violenta inestabilidad de su tumultuosa vida, Kepler fuera capaz de descubrir lo que muchos consideran el auténtico nacimiento de la ciencia moderna.

Kepler comenzó sus estudios en el seminario superior de Maulbronn y más tarde, en 1589, consiguió una beca del Duque de Wütenberg para estudiar en el seminario luterano de la Universidad de Tubinga. Las dos asignaturas que más le atrajeron, y que en su mente estaban íntimamente relacionadas, eran teología y matemáticas. En aquellos momentos, se consideraba que la astronomía formaba parte de las matemáticas, y el profesor de astronomía de Kepler

fue el eminente astrónomo Michael Mästlin (1550-1631), con quien mantuvo el contacto incluso tras abandonar Tubinga.

En sus clases, Mästlin debió de enseñar sólo el sistema tradicional tolomeico y geocéntrico, en el cual la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno giraban alrededor de una Tierra estacionaria. Sin embargo, Mästlin conocía perfectamente el sistema heliocéntrico de Nicolaus Copérnico, publicado en 1543, y en privado debatía los méritos del mismo con su estudiante favorito, Kepler. En el sistema de Copérnico, seis planetas (incluida la tierra pero no la Luna que no se consideraba un planeta sino un «satélite») giraban alrededor del Sol. Del mismo modo que desde un coche en movimiento sólo se puede observar el movimiento relativo de otros coches, en el sistema de Copérnico, lo que en apariencia es el movimiento de los planetas simplemente refleja el de la Tierra.

Parece ser que a Kepler le gustó de inmediato el sistema copernicano. La idea fundamental de esta cosmología, la de un Sol central rodeado por una esfera de estrellas fijas con un espacio entre la esfera y el Sol, encajaba perfectamente con su visión del cosmos. Como era un hombre profundamente religioso, Kepler creía que el universo era un reflejo de su Creador. La unidad del Sol, las estrellas y el espacio intermedio simbolizaban para él la Santísima Trinidad del Padre, el Hijo y el Espíritu Santo.

Kepler se graduó con honores en la facultad de Artes, y cuando estaba a punto de terminar sus estudios teológicos, algo ocurrió que le hizo cambiar de orientación profesional: de pastor a profesor de matemáticas. El seminario protestante de Graz, en Austria, pidió a la Universidad de Tubinga que les recomendara un sustituto para su profesor

de matemáticas que había fallecido hacía poco, y la Universidad eligió a Kepler. En marzo de 1594, Kepler viajó contra su voluntad durante un mes a Graz, en la provincia austriaca de Styria.

Kepler se dio cuenta que el destino le obligaba a ejercer una carrera matemática, así que se propuso cumplir lo que consideraba un deber cristiano: entender la creación de Dios, el Universo. Por consiguiente, se enfrascó en las traducciones de los *Elementos* y de las obras de los geómetras alejandrinos Apolonio y Pappo. Aceptando el principio general del sistema heliocéntrico copernicano, se dispuso a buscar las respuestas a las siguientes cuestiones: ¿por qué hay exactamente seis planetas? ¿qué determina que las órbitas planetarias estén espaciadas de semejante modo? Estos «por qué» y «qué» eran una auténtica novedad en el vocabulario astronómico. A diferencia de anteriores astrónomos que se contentaban simplemente con registrar las posiciones de los planetas, Kepler buscaba una teoría que lo explicara todo. De este modo expresaba esta nueva aproximación de la curiosidad humana:

> Sucede que en toda adquisición de conocimientos, desde aquellas cosas que atañen a nuestros sentidos, la mente nos lleva a cosas más elevadas que no pueden alcanzarse por la agudeza de los sentidos. Lo mismo ocurre con la astronomía, en la que ante todo percibimos con nuestros ojos las posiciones varias de los planetas en diferentes momentos, y la razón se impone a estas observaciones y conduce a la mente a reconocer la forma del universo.

Pero, se preguntaba Kepler, ¿qué herramienta utilizaría Dios para diseñar Su universo?

El primer esbozo de lo que se convertiría en su fabulosa explicación a estas preguntas cósmicas se le ocurrió el 19 de julio de 1595 cuando intentaba explicar las conjunciones de los planetas exteriores, Júpiter y Saturno (cuando los dos cuerpos tienen la misma coordenada celestial). Básicamente, se dio cuenta de que si inscribía un triángulo equilátero

dentro de un círculo (con sus vértices en el círculo), y otro círculo dentro del triángulo (tocando la parte central de sus lados; figura 58), entonces la proporción del radio del círculo mayor respecto al menor era más o menos la misma que la proporción de los lados de la órbita de Saturno respecto a la de Júpiter. Siguiendo esta línea de pensamiento, decidió que para conseguir la órbita de Marte (el siguiente planeta más cercano al Sol), necesitaría utilizar la siguiente figura geométrica, un cuadrado, inscrito dentro de un pequeño círculo. Sin embargo, al hacer esto no consiguió el tamaño adecuado. Kepler no se rindió, e inspirado por una visión platónica según la cual «Dios siempre geometriza», le resultó natural hacer el siguiente paso geométrico e intentó las figuras tridimensionales. Este ejercicio tuvo como resultado la primera utilización por parte de Kepler de los objetos geométricos relacionados con la Proporción Áurea.

Kepler halló la respuesta a las dos preguntas que le intrigaban en su primer tratado, conocido como *Misterium Cosmographicum* (El Misterio Cósmico) publicado en 1597. El título completo, que aparece en la página inicial del libro (figura 59; aunque la fecha de publicación sea 1596, el libro se publicó al año siguiente) reza así: «Un precursor de las disertaciones cosmográficas, que contiene el misterio cósmico de las proporciones admirables de las Esferas Celestes, y de las Causas Verdaderas y Adecuadas de los Números, Tamaños y Movimientos Periódicos de los Cielos, Demostrado por los Cinco Sólidos Geométricos Regulares».

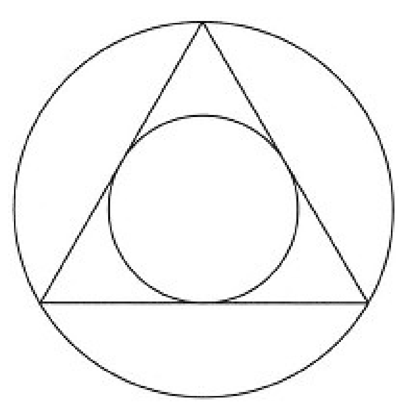
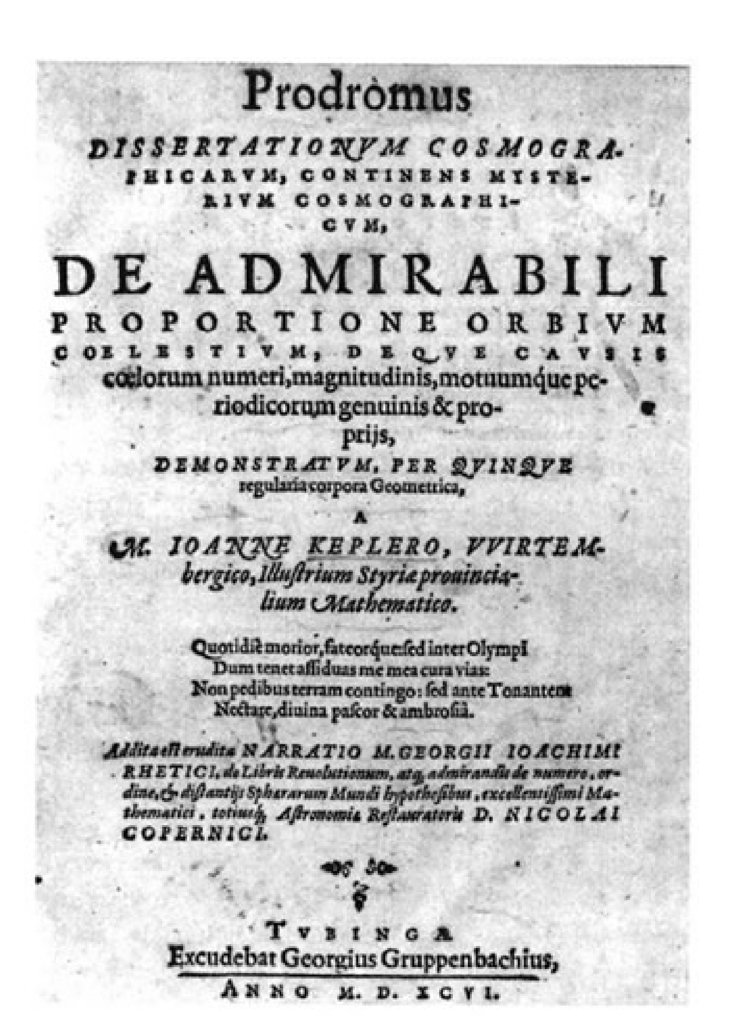


FIGURA 58

La respuesta de Kepler a la pregunta de por qué había seis planetas era simple: porque hay cinco sólidos platónicos regulares. Si se consideran como límites, los sólidos determinan seis espacios (con un límite esférico exterior correspondiente al cielo de las estrellas fijas). Más aún, el modelo de Kepler se diseñó para responder al mismo tiempo a la cuestión de los tamaños de las órbitas. En sus propias palabras:

> La esfera de la Tierra es la medida de todas las órbitas. Circunscriba un dodecaedro a su alrededor. La esfera que la rodea será la de Marte. Circunscriba un tetraedro alrededor de Marte. La esfera que lo rodea será la de Júpiter. Circunscriba un cubo alrededor de Júpiter. La esfera que lo rodea será la de Saturno. Ahora inscriba un icosaedro en la órbita de la Tierra. La esfera inscrita será la de Venus. Inscriba un octaedro dentro de Venus. La esfera inscrita en ella será la de Mercurio. Ya tiene la base para el número de los planetas.


Prodromus
DISSERTATIONVM COSMOGRAPHICARVM, CONTINENS MYSTERIVM COSMOGRAPHICVM,
DE ADMIRABILI
PROPORTIONE ORBIVM COELESTIVM, DEQVE CAVSIS
coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & proprijs,
DEMONSTRATVM, PER QVINQVE regularia corpora Geometrica,
A
M. IOANNE KEPLERO, VVIRTEMbergico, Illustrium Styriae prouincialium Mathematico.

Quotidie morior, fateorque: sed inter Olympi
Dum tenet assiduas me mea cura vias:
Non pedibus terram contingo: sed ante Tonantem
Nectare, diuina pascor & ambrosia.

Addita est erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI RHETICI, de Libris Reuolutionum, atque admirandis de numero, ordine, & distantijs Sphaerarum Mundi hypothesibus, excellentissimi Mathematici, totiusque Astronomiae Restauratoris D. NICOLAI COPERNICI.

TVBINGAE
Excudebat Georgius Gruppenbachius,
ANNO M. D. XCVI.

FIGURA 59

La figura 60 muestra un esquema de *Misterium Cosmographicum* que ilustra el modelo cosmológico de Kepler. Éste explicó extensamente por qué realizó asociaciones particulares entre los sólidos platónicos y los planetas según sus atributos geométricos, astrológicos y metafísicos. Ordenó los sólidos según su relación con la esfera, teniendo en cuenta que las diferencias entre la esfera y los otros sólidos reflejaban la distinción entre el Creador y su creación. De igual modo, el cubo se caracteriza por un ángulo *único* (el ángulo recto). Para Kepler, esto simbolizaba

la soledad asociada con Saturno, y así sucesivamente. De forma más general, para Kepler era importante la astrología porque «el hombre es el objetivo del universo y de toda la creación», y justificaba la aproximación metafísica ya que «las cosas matemáticas son la causa de las físicas porque Dios desde el principio de los tiempos llevaba dentro de sí en abstracción simple y divina los objetos matemáticos en tanto prototipos de las cantidades planeadas materialmente».



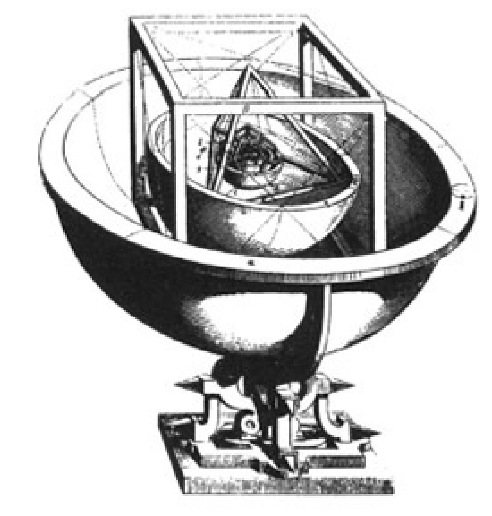


FIGURA 60

La posición de la Tierra se eligió para separar los sólidos que podían sostenerse derechos (por ejemplo, el cubo, el tetraedro y el dodecaedro), de aquellos que «flotan» (el octaedro y el icosaedro).

La distancia de los planetas resultante de este modelo funciona razonablemente bien con algunos planetas, pero discrepa significativamente respecto a otros (aunque la discrepancia no supere el 10 por ciento). Kepler, absolutamente convencido de la exactitud de su modelo, atribuyó la mayoría de errores a un fallo en el cálculo de las órbitas. Envió copias del libro para que varios astrónomos lo comentaran, incluyendo una copia a una de las figuras más

sobresalientes del momento, el danés Tycho Brahe (1546-1601). Una copia incluso llegó a las manos del gran Galileo Galilei (1564-1642), quien informó a Kepler de que él también creía en el modelo copernicano, pero que lamentaba el hecho de que «entre muchos (dado que muchos son los locos) Copérnico haya sido elegido para ser ridiculizado y abucheado».

No hace falta que diga que el modelo cosmológico de Kepler, basado en los sólidos platónicos, no sólo era absolutamente erróneo sino que era una locura incluso para la época de Kepler. El descubrimiento de los planetas Urano (justo después de Saturno respecto al Sol) en 1781 y Neptuno (justo después de Urano) en 1846 cerró definitivamente el ataúd de una idea ya moribunda. No obstante, la importancia de este modelo para la historia de la ciencia no debe exagerarse. Como señaló el astrónomo Owen Gingerich en su artículo biográfico sobre Kepler: «pocas veces en la historia, un libro tan equivocado ha sido tan prolífico a la hora de dirigir el futuro curso de la ciencia». Kepler llevó un paso adelante la idea pitagórica de un cosmos que puede explicarse mediante las matemáticas. Desarrolló un verdadero *modelo matemático* del universo, el cual, por un lado, se basaba en cálculos de observaciones existentes y, por otro, era *falsificable* por observaciones *aposteriori*. Éstos son precisamente los ingredientes del «método científico»: la aproximación organizada para explicar hechos observados con un modelo de la naturaleza. El método científico ideal empieza con la recolección de hechos; a continuación, se propone un modelo, y las predicciones del modelo se comprueban mediante experimentos u observaciones posteriores. Este proceso se puede resumir mediante la siguiente secuencia: inducción, deducción y verificación. De hecho, a Kepler incluso le

dieron la oportunidad de realizar una predicción con éxito basándose en esta teoría. En 1610, Galileo descubrió con su telescopio cuatro nuevos cuerpos celestes del Sistema Solar. En caso de que se hubiera demostrado que eran planetas, la teoría de Kepler habría sufrido un duro revés ya mientras estaba vivo. No obstante, para la tranquilidad de Kepler, resultó que los nuevos cuerpos eran satélites (como nuestra Luna) de Júpiter, y no nuevos planetas que giraban alrededor del Sol.

Las teorías actuales que pretenden explicar la existencia de todas las partículas elementales (subatómicas) y las interacciones básicas entre ellas, se apoyan en las simetrías matemáticas de un modo muy similar en que la teoría de Kepler se apoyaba en las propiedades simétricas de los sólidos platónicos para explicar el número y propiedades de los planetas. El modelo de Kepler tenía algo más en común con la actual teoría fundamental del universo: ambas teorías son por su propia naturaleza *reduccionistas* (las dos intentan explicar muchos fenómenos mediante unas cuantas leyes fundamentales). Por ejemplo, el modelo de Kepler dedujo tanto el número de planetas como las propiedades de sus órbitas a partir de los sólidos platónicos. De forma similar, las teorías modernas conocidas como teoría de cuerdas utilizan entidades básicas (cuerdas) extremadamente pequeñas (más de un billón de billones menor que el núcleo atómico) para deducir las propiedades de todas las partículas elementales. Como la cuerda de un violín, las cuerdas pueden vibrar y producir una variedad de «tonos» y todas las partículas elementales conocidas simplemente representan estos tonos diferentes.

El interés permanente de Kepler por la Proporción Áurea durante su estancia en Graz originó otro resultado interesante. En octubre de 1597 escribió a Mästlin, su antiguo profesor, acerca del siguiente teorema: «si sobre una línea dividida en proporción media y extrema construimos un triángulo de ángulo recto, de modo que el ángulo recto quede sobre la perpendicular colocada en el punto de sección, entonces el brazo menor será igual al segmento mayor de la línea dividida». La afirmación de Kepler se representa en la figura 61. La línea *AB* está dividida en Proporción Áurea por el punto *C*. Kepler construye un triángulo rectángulo *ADB* sobre *AB* como hipotenusa, con el ángulo recto *D* sobre la perpendicular colocada en punto de la sección áurea *C*. Entonces demuestra que *BD* (el lado menor del ángulo recto) es igual a *AC* (el segmento mayor de la línea dividida en Proporción Áurea). Lo que convierte a este triángulo en especial (aparte de la utilización de la Proporción Áurea) es que en 1855 fue usado por el piramidólogo Friedrich Röber en una de sus falsas teorías sobre la presencia de la Proporción Áurea en el diseño de las pirámides. Röber no conocía la obra de Kepler, pero utilizó una construcción similar para apoyar la teoría de que la «Proporción Divina» jugaba un papel crucial en la arquitectura.

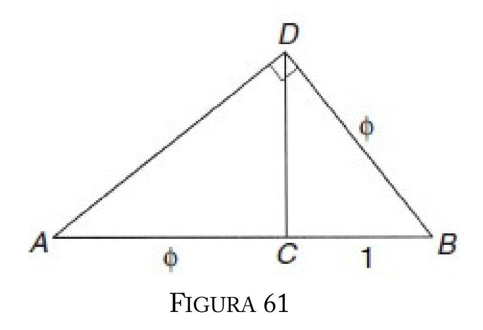


FIGURA 61

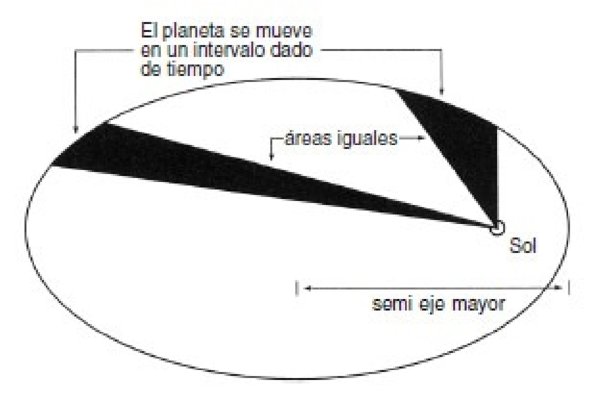


FIGURA 62

El *Misterium Cosmographicum* de Kepler originó un encuentro entre éste y Tycho Brahe en Praga (en aquellos momentos la sede del emperador del Sacro Imperio Romano). La reunión se celebró el 4 de febrero del 1600, y fue el preludio del traslado de Kepler a Praga como asistente de Tycho en octubre del mismo año (tras ser expulsado de la católica Graz por culpa de su fe luterana). Cuando Brahe murió el 24 de octubre de 1601, Kepler se convirtió en el Matemático Imperial.

Tycho dejó un *corpus* enorme de observaciones, en especial de la órbita de Marte, y Kepler utilizó estos datos para descubrir las dos primeras leyes del movimiento de los planetas que llevan su nombre. La Primera Ley de Kepler señala que las órbitas de los planetas conocidos alrededor del Sol no son círculos exactos sino elipses, con el Sol en uno de los focos (figura 62; el alargamiento de la elipse se ha exagerado mucho). Una elipse tiene dos puntos, llamados focos, tales que la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse desde los dos focos es el mismo. La Segunda Ley de Kepler establece que el planeta se mueve más de prisa cuanto más cerca está del Sol (el punto conocido como perihelio), y más lento cuanto más lejano (afhelio) de tal

modo que la línea que une al planeta con el Sol ocupa áreas iguales en intervalos de tiempo iguales (figura 62). La cuestión sobre las causas que provocan que las Leyes de Kepler sean ciertas fue un problema científico no resuelto durante casi setenta años tras la publicación de las leyes. Fue necesario el genio de Isaac Newton (1642-1727) para deducir que la fuerza que mantenía a los planetas en sus órbitas era la gravedad. Newton explicó las Leyes de Kepler resolviendo al mismo tiempo las leyes que describían el movimiento de los cuerpos con la ley de gravitación universal. Newton demostró que las órbitas elípticas con diversas velocidades (tal y como se describe en las Leyes de Kepler) representan una posible solución a estas ecuaciones.

Los esfuerzos heroicos de Kepler en los cálculos de las órbitas de Marte (cientos de hojas de aritmética y su interpretación, a las que apodó «mi guerra con Marte») son considerados por muchos investigadores como el nacimiento de la ciencia moderna. En particular, en un momento dado descubrió una órbita circular que encajaba con prácticamente todas las observaciones de Tycho. En dos casos, sin embargo, dicha órbita predecía una posición que difería de las observaciones alrededor de un cuarto del diámetro angular de la luna llena. Kepler escribió acerca de este acontecimiento: «Si hubiera creído que podíamos ignorar estos ocho minutos (de arco), en ese caso, hubiese modificado mi hipótesis en el capítulo dieciséis. Ahora, ya que no se puede obviar, aquellos ocho minutos por sí solos marcan el camino de una completa reforma de la astronomía».

Los años de Kepler en Praga fueron extremadamente productivos tanto desde un punto de vista astronómico como productivo. En 1604 descubrió una «nueva» estrella,

conocida actualmente como Supernova Kepler. Una supernova es una poderosa explosión estelar en la que una estrella próxima al fin de su existencia expulsa sus capas exteriores a una velocidad de 16.000 kilometros por segundo. En nuestra Vía Láctea se produce una explosión similar una media de una vez cada cien años. Ciertamente, Tycho descubrió una supernova en 1572 (Supernova Tycho), y Kepler descubrió otra en 1604. Desde entonces, sin embargo, por razones no del todo claras, no se ha descubierto ninguna otra supernova en la Vía Láctea (aunque parece ser que estalló una en 1660 sin que nadie la registrara). Los astrónomos afirman jocosamente que quizás esta pausa de supernovas se deba simplemente a la inexistencia de grandes astrónomos desde Tycho y Kepler.

En junio de 2001, realicé una visita a la casa de Praga en la que vivió Kepler, en el número 4 de la calle Karlova. Hoy en día, es una calle comercial muy transitada en la que es fácil no ver la placa oxidada sobre el número 4 donde figura que Kepler vivió en su interior desde 1605 a 1612. Uno de los tenderos justo debajo de la casa de Kepler no sabía que uno de los mayores astrónomos de todos los tiempos vivió allí. El patio trasero, de un aspecto más bien triste, contiene una pequeña escultura con una esfera y el nombre de Kepler escrito transversalmente, y hay otra placa cerca de los buzones. El apartamento de Kepler, sin embargo, no está señalado de ninguna manera especial ni está abierto al público al estar ocupado por una de las muchas familias que viven en los pisos residenciales superiores. La obra matemática de Kepler aportó unos cuantos hitos más a la historia de la Proporción Áurea. En una carta que escribió en 1608 a un profesor de Leipzig descubrimos que encontró la relación entre los números Fibonacci y la Proporción Áurea. En un artículo posterior

repite los contenidos de ese descubrimiento y muestra la razón de la forma de seis curvas de los copos de nieve. Kepler escribe:

> De los dos sólidos regulares, el dodecaedro y el icosaedro… estos dos sólidos, y ciertamente la misma estructura del pentágono, no se pueden formar sin la Proporción Divina como la llaman los geómetras de hoy en día. Está determinado que los dos términos menores de una serie progresiva juntos constituyen el tercero, y los dos últimos, al ser sumados, hacen el término inmediatamente posterior, y así sucesivamente hasta el infinito, mientras la misma proporción continúe sin interrumpirse… cuanto más nos alejemos del número uno, más perfecto será el ejemplo. Si los números más pequeños son 1 y 1… súmelos, y la suma será 2; añada a éste el último de los 1, y el resultado será 3; añada 2 a éste, y tendrá 5; añada 3, tendrá 8; 5 a 8, 13; 8 a 13, 21. Como el cinco es al 8, el 8 es al 13, aproximadamente, y como el 8 al 13, el 13 al 21, aproximadamente.

En otras palabras, Kepler descubrió que la proporción de números Fibonacci consecutivos converge en la Proporción Áurea. De hecho, también descubrió otra propiedad interesante de los números Fibonacci: que el cuadrado de cualquier cifra difiere en 1 como máximo del producto de las dos cifras adyacentes en la secuencia. Por ejemplo, si la secuencia es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …, y obtenemos $3^2 = 9$, vemos que sólo difiere por 1 del producto de las dos cifras adyacentes a 3, $2 \times 5 = 10$. Del mismo modo, $13^2 = 169$ difiere por 1 de $8 \times 21 = 168$, y así sucesivamente.

Esta propiedad particular de los números Fibonacci originó una desconcertante paradoja que fue presentada por primera vez por el gran creador de *puzzles* matemáticos Sam Loyd (1841-1911).

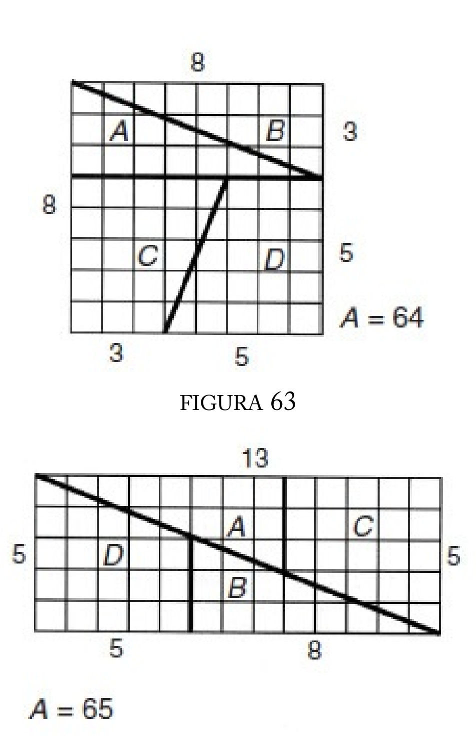


FIGURA 63

FIGURA 64

Considere el cuadrado de ocho unidades en un lado (área de $8^2 = 64$ en la figura 63). Ahora diséctela en cuatro partes como se indica. ¡Las cuatro partes pueden volverse a juntar (figura 64) para formar un rectángulo de lados 13 y 5 con un área de 65! ¿De dónde ha salido la unidad al cuadrado extra? La solución a la paradoja reside en el hecho de que las partes en realidad no encajan exactamente a lo largo de la diagonal mayor del rectángulo: hay un estrecho margen (un paralelogramo largo y delgado oculto tras la gruesa línea que marca la diagonal mayor en la figura 64) con un área de una unidad al cuadrado. Por supuesto, el 8 es un número Fibonacci, su cuadrado ($8^2 = 64$) difiere en 1 del producto de sus dos números Fibonacci adyacentes ($13 \times 5 = 65$): la propiedad descubierta por Kepler.

Probablemente se habrá dado cuenta de que Kepler se refiere a la Proporción Áurea como «la Proporción Divina como la llaman los geómetras hoy en día». La combinación de elementos racionales con creencias cristianas es una característica de toda la obra de Kepler. Como filósofo natural cristiano, Kepler consideraba que era su deber entender el universo junto con las intenciones de su Creador. Fusionando sus ideas sobre el Sistema Solar con su fuerte afinidad por el número 5, adoptado de los pitagóricos, Kepler escribe sobre la Proporción Áurea:

> Una peculiaridad de esta proporción reside en que puede construirse una proporción similar a partir de una parte mayor y del todo; lo que antes era la parte mayor se convierte en la menor, lo que antes era la parte entera ahora es la mayor, y la suma de estas dos es la proporción de la entera. Y así continúa de modo indefinido; siempre prevalece la Proporción Divina. Creo que esta proporción geométrica sirvió de idea al Creador cuando introdujo la creación de una apariencia a partir de otra apariencia, que también continúa indefinidamente. Veo el número cinco en casi todas las flores que se convertirán en fruto, es decir, en la creación, y que existen no por ellas mismas sino por el fruto que las sucederá. Casi todas las flores arbóreas pueden incluirse en esta categoría; quizá debería excluir los limones y las naranjas; aunque no he visto sus flores y lo juzgo a partir de la fruta o de la baya, que no se dividen en 5 sino en 7, 9 u 11 corazones. Pero en geometría, el número cinco, es decir, el pentágono se construye por medio de la Proporción Divina que deseo que sea el prototipo de la creación. Más aún, se encuentra entre el movimiento del Sol (o, según creo, en la Tierra) y el de Venus, que permanece a la cabeza de la capacidad generativa de la proporción de 8 a 13 y, como veremos, se aproxima a la Proporción Divina. Finalmente, según Copérnico, la esfera de la Tierra está a medio camino de las esferas de Marte y Venus. La proporción entre ellos se obtiene a partir del dodecaedro y el icosaedro, que en geometría se derivan ambos de la Proporción Divina; sin embargo, es en nuestra Tierra donde sucede el acto de la procreación.
>
> Ahora veamos como la imagen del hombre y de la mujer se deriva de la Proporción Divina. En mi opinión la propagación de las plantas y los actos procreadores de los animales están en la misma proporción que la proporción geométrica, o proporción representada por los segmentos lineales y la proporción expresada numérica o aritméticamente.

En pocas palabras, Kepler creía firmemente que la Proporción Áurea constituía una herramienta fundamental de Dios para la creación del universo. El texto nos muestra también que Kepler conocía la existencia de la Proporción Áurea y de los números Fibonacci en la disposición de los pétalos de las flores.

Los años de Kepler en Praga relativamente tranquilos y fructíferos profesionalmente acabaron en 1611 con una serie de desastres. En primer lugar, su hijo Friedrich murió de viruela; más tarde, su esposa Barbara murió como consecuencia de una fiebre contagiosa que trajeron las tropas austriacas ocupantes. Y finalmente, el Emperador Rudolph fue depuesto, abdicando la corona en favor de su hermano Matthias, conocido por su poca tolerancia hacia los protestantes. Kepler se vio obligado a abandonar la ciudad y dirigirse a Linz, en la actual Austria.

La joya de la corona de la obra de Kepler en Linz apareció en 1619 con la publicación de su segunda mejor obra sobre cosmología: *Armonice Mundi* (Armonía del Mundo).
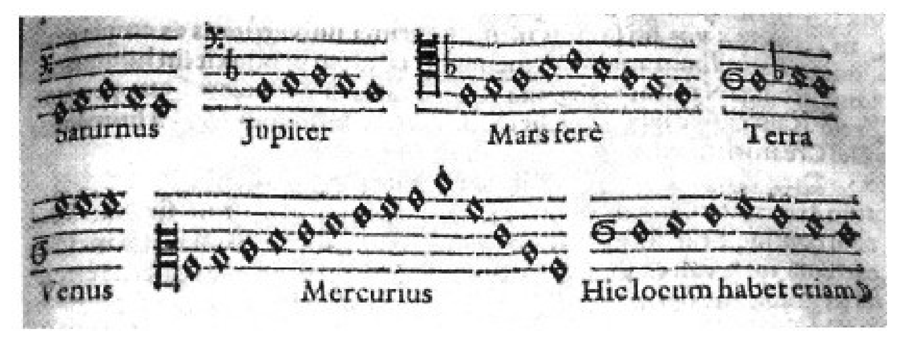


FIGURA 65

Recuerden que la música y la armonía representaban para Pitágoras y los pitagóricos la primera evidencia de que los fenómenos cósmicos podían describirse mediante las matemáticas. Sólo las cuerdas punteadas en longitudes con

proporciones correspondientes a números simples producían tonos consonantes. Con una proporción de 2:3 sonaba una quinta, 3:4 una cuarta, y así sucesivamente. También se pensaba que los espacios armónicos similares entre los planetas producían la «música de las esferas». Estos conceptos le eran muy familiares a Kepler ya que había leído casi todo el libro del padre de Galileo, Vincenzo Galilei, *Diálogo de la música antigua y de la moderna*, aunque rechazaba algunas de las ideas de éste. Como Kepler creía que tenía un modelo completo del Sistema Solar, pudo desarrollar pequeñas «melodías» para los diferentes planetas (figura 65).

Dado que Kepler estaba convencido de que «antes del origen de las cosas, la geometría era co-eterna con la Mente Divina», la mayor parte de *Armonía del Mundo* estaba dedicada a la geometría. Un aspecto particularmente importante para la historia de la Proporción Áurea es la obra de Kepler sobre el embaldosado o el teselado.

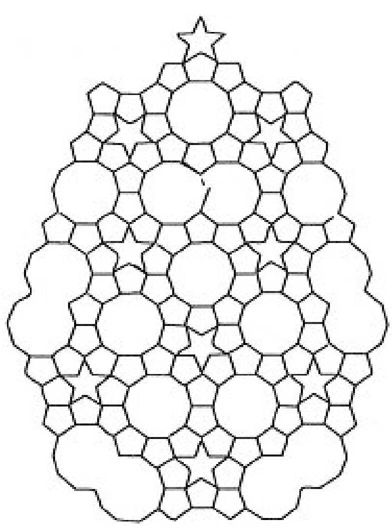


FIGURA 66

Generalmente, la palabra «embaldosado» se utiliza para describir un modelo o estructura compuesto de una o más formas de «baldosas» que cubren un plano de un modo exacto, sin espacios, como la disposición de mosaicos o baldosas. En el capítulo 8 veremos que algunos de los conceptos presentes en el embaldosado están íntimamente relacionados con la Proporción Áurea. Aunque Kepler desconocía los secretos de las matemáticas del embaldosado, su interés por la relación entre las diferentes formas geométricas y su admiración por el pentágono (la manifestación más directa de la «Proporción Divina») fue suficiente para originar su interesante obra sobre el embaldosado. En especial estaba interesado en la congruencia (encaje) de las formas geométricas como los polígonos y los sólidos. La figura 66 muestra un ejemplo de la *Armonía del Mundo*. Este modelo de embaldosado en particular está compuesto de cuatro formas, todas relacionadas con la Proporción Áurea: pentágonos, pentagramas, decágonos y dobles decágonos. Para Kepler se trataba de una representación de «armonía», ya que *armonía* significa en griego «encajar».

Curiosamente, los otros dos hombres que jugaron un papel importante en la historia de la Proporción Áurea antes que Kepler (y cuya obra hemos descrito en capítulos anteriores) también mostraron interés en el embaldosado: el matemático del siglo x Abu'l-Wafa y el pintor Alberto Durero. Ambos presentaron diseños de figuras con simetría multiplicada por cinco. (Se muestra un ejemplo de la obra de Durero en la figura 67.)

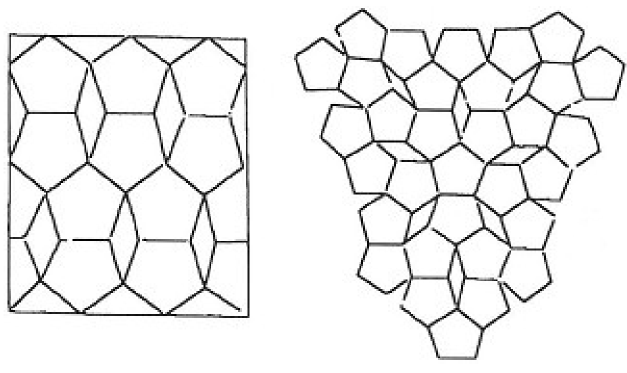


FIGURA 67

El quinto libro de la *Armonía del Mundo* contiene los resultados más significativos sobre astronomía de Kepler: la Tercera Ley de Kepler del movimiento planetario. Esto representó la culminación de su angustia por los tamaños de las órbitas de los planetas y su periodo de revolución alrededor del Sol. Veinticinco años de trabajo se vieron resumidos en una ley increíblemente simple: la proporción del periodo al cuadrado respecto al semieje mayor al cubo es la misma para todos los planetas (el semieje mayor es la mitad del eje mayor de la elipse; figura 62). Kepler descubrió esta ley fundamental, que sirvió como base para la formulación de Newton para la ley de gravitación universal, cuando *Armonía del Mundo* ya estaba en la imprenta. Incapaz de contener su alegría desbordante, anunció: «He robado las vasijas doradas de los egipcios para construir un tabernáculo a mi Dios lejos de las fronteras de Egipto». La esencia de esta ley se deriva de la ley de la gravedad: la fuerza es mayor cuanto más cerca esté el planeta del Sol; por tanto, los planetas interiores deben moverse más rápidamente para evitar caer hacia el Sol.

En 1626 Kepler se mudó a Ulm y completó las *Tablas Rudolfinas*, las tablas astronómicas más extensas y exactas jamás realizadas hasta entonces. Durante mi visita a la

Universidad de Viena en junio de 2001, mis anfitriones me mostraron en la Biblioteca del observatorio una primera edición de las tablas (en la actualidad sólo hay 147 copias conocidas). El frontispicio del libro (figura 68), una representación simbólica de la historia de la astronomía, tiene en la esquina inferior izquierda lo que debe de ser el único autorretrato de Kepler (figura 69), en el que se representa a Kepler trabajando a la luz de una vela bajo un estandarte con los títulos de sus publicaciones más importantes.

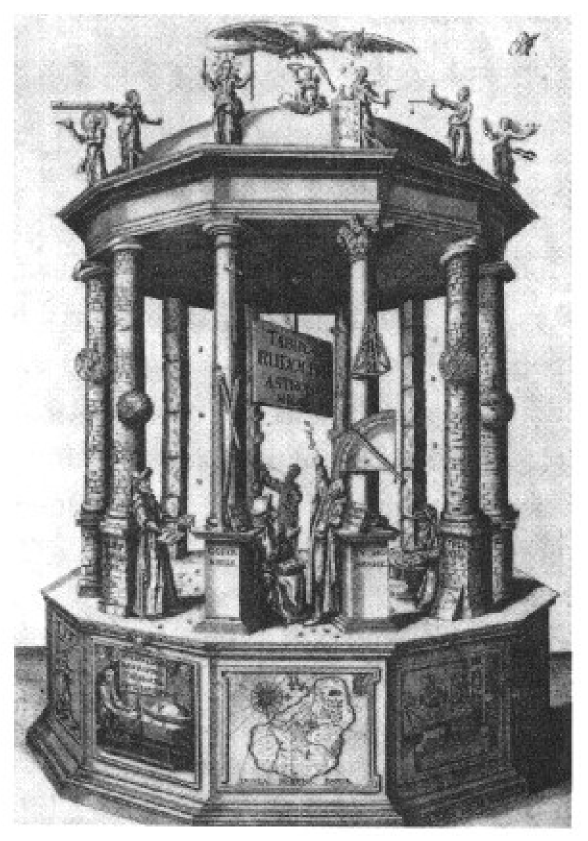


FIGURA 68

Kepler murió el mediodía del 15 de noviembre de 1630 y fue enterrado en Regensburg. De un modo apropiado a su turbulenta vida, las guerras han destruido su tumba

completamente. Afortunadamente, sobrevivió un esbozo de la lápida hecho por un amigo que contiene el epitafio del propio Kepler:

Yo solía medir los cielos
Ahora las sombras de la tierra mido
Mi mente estaba en los cielos,
Ahora la sombra de mi cuerpo descansa aquí.

En la actualidad, su originalidad y prolífico trabajo son casi incomprensibles. Debemos darnos cuenta de que este hombre sufrió una serie de dificultades personales inimaginables, incluyendo la pérdida de tres de sus hijos en menos de seis meses, de 1617 a 1618. El poeta inglés John Donne (1572-1631) le describió mejor que nadie cuando dijo que a Kepler «se le había encomendado que nada nuevo habría de hacerse en el cielo sin su conocimiento».

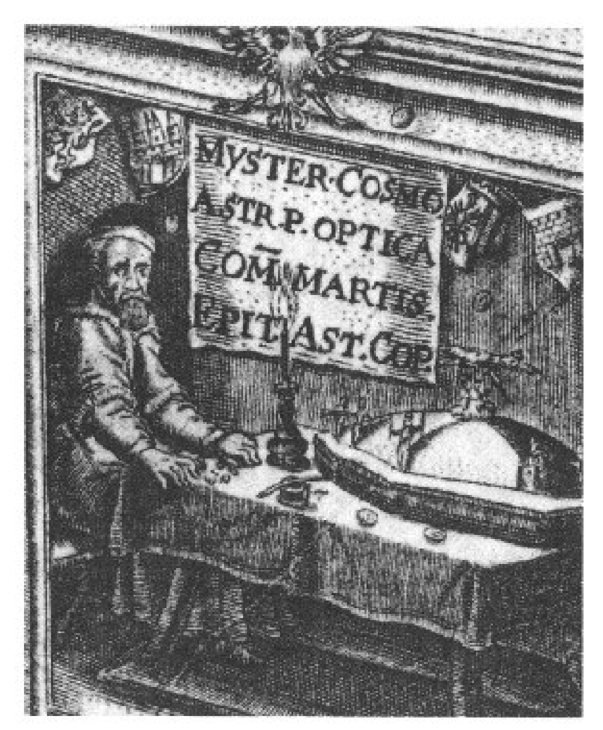


FIGURA 69

7
PINTORES Y POETAS GOZAN DE LA MISMA LIBERTAD

Pintar no es una operación estética; es una forma de magia diseñada para mediar entre este extraño mundo hostil y nosotros.

PABLO PICASSO (1881-1973)

El Renacimiento trajo un significativo cambio de dirección en la historia de la Proporción Áurea, ya que este concepto ya no estaría por más tiempo confinado en las matemáticas. A partir de entonces, la Proporción Áurea encontró su camino en las explicaciones de los fenómenos naturales y en las artes.

Hasta el momento hemos encontrado diversas teorías que afirmaban la presencia de la Proporción Áurea en el diseño arquitectónico de varias estructuras de la antigüedad, tales como la Gran Pirámide o el Partenón. Sin embargo, un examen detallado de dichas teorías ha revelado la poca sustentación de la mayoría de ellas. La introducción de la noción de la existencia de una «Proporción Divina» y el reconocimiento general de la importancia de las matemáticas en la perspectiva, permitió que algunos artistas empezaran a utilizar en su trabajo métodos basados en la ciencia en general y en la Proporción Áurea en particular. El pintor y dibujante contemporáneo David Hockney argumenta en su libro *Secret Knowledge* (2001), por ejemplo, que a partir de 1430 aproximadamente, los artistas empezaron a utilizar en secreto instrumentos parecidos a cámaras, como lentes, espejos cóncavos y la cámara oscura, para que sus creaciones pictóricas tuvieran un aspecto realista. Pero ¿es cierto que los artistas utilizaron la

Proporción Áurea? Y si lo hicieron, ¿la aplicación de la Proporción Áurea quedó restringida a las artes visuales o penetró en otras áreas de la creación artística?

¿LA GEOMETRÍA SECRETA DEL ARTISTA?

Muchas afirmaciones sobre el empleo de la Proporción Áurea en la pintura están directamente asociadas con las presuntas propiedades estéticas del Rectángulo Áureo. Más adelante, en este mismo capítulo, trataré la realidad (o falsedad) del mencionado canon estético. Por el momento me concentraré en la siguiente pregunta, mucho más sencilla: ¿Algún pintor renacentista basó sus composiciones artísticas en el Rectángulo Áureo? Para poder resolver esta cuestión debemos remontarnos al siglo XIII.

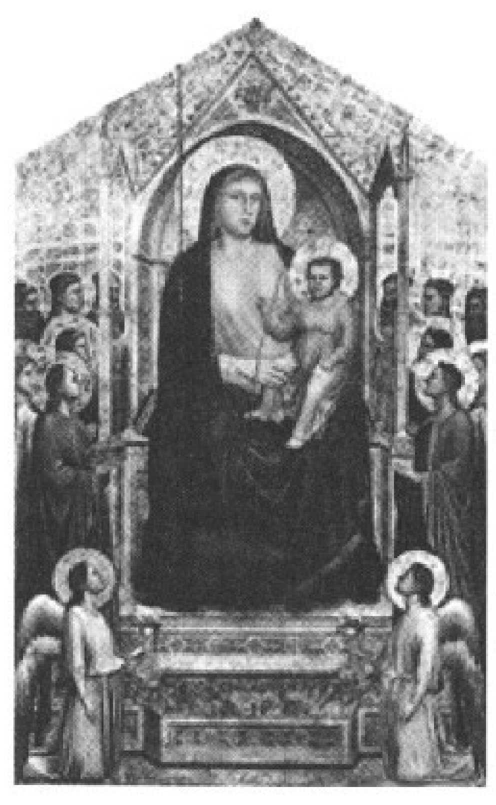


FIGURA 70



FIGURA 71

La *Ognissanti Madonna* (también conocida como la *Madonna en Gloria*, figura 70; actualmente en la Galería Uffizi de Florencia) es uno de los retablos más grandes del famoso pintor y arquitecto italiano Giotto di Bondone (1267-1337). Ejecutado entre 1306 y 1310, el fresco representa a una Virgen entronizada con media sonrisa en el rostro protegiendo la rodilla del Niño Jesús. La Madonna y el Niño están rodeados por ángeles y santos dispuestos en algún tipo de «jerarquía» en perspectiva. Muchos libros y artículos sobre la Proporción Áurea repiten la afirmación según la cual tanto la pintura en su totalidad como las figuras centrales pueden inscribirse de forma precisa en Rectángulos Áureos (figura 71).

Se han realizado afirmaciones similares respecto a otras dos pinturas que responden al mismo tema general: la *Madonna Rucellai* (pintada en 1285) del gran pintor de Siena, Duccio di Buoninsegna, conocido como Duccio (circa 1255-1319), y la *Santa Trinita Madonna* del pintor florentino Cenni di Pepo, conocido como Cimabue (circa 1240-1302). Por un capricho del destino, actualmente las tres pinturas se exponen en la misma habitación de la Galería Uffizi, Florencia. Las dimensiones de las Madonnas de *Ognissanti*, de *Rucellai* y de la *Santa Trinita* tienen unas proporciones de la altura respecto a la anchura de 1, 59, 1, 55 y 1, 73, respectivamente. Aunque los tres números están muy próximos a la Proporción Áurea, dos de ellos, de hecho, están más cerca de la proporción simple 1, 6 que del número irracional Φ. Este hecho podría indicar (si es que indica algo) que los artistas siguieron las indicaciones del Vitruvio y optaron por una proporción simple, es decir, una proporción de dos números enteros en lugar de la Proporción Áurea. El rectángulo interior en la *Ognissanti Madonna* (figura 71) nos deja una impresión igualmente ambigua. No únicamente los límites del rectángulo están dibujados (como puede verse en el fascinante libro de Trudi Hammel Garland *Fascinating Fibonacci*s) con líneas demasiado gruesas, convirtiendo en incierta cualquier medición, sino que, de hecho, la parte superior horizontal se ha colocado de forma algo arbitraria.

Si no olvidamos los peligros que conlleva el confiar tan sólo en el cálculo de dimensiones, deberíamos preguntarnos si existen otras razones que hagan sospechar que estos tres artistas sintieron el deseo de incluir en sus obras la Proporción Áurea. La respuesta a esta cuestión parece ser que es negativa, a no ser que fueran arrastrados a dicha proporción mediante algún tipo de preferencia estética

inconsciente (una posibilidad que trataremos más adelante en este capítulo). Recuerden que las tres Madonnas se pintaron más de dos siglos antes de que la publicación *The Divine Proportion* otorgara a dicha proporción una mayor atención.

En el libro *The Painter's Secret Geometry* (1963), el pintor y escritor francés Charles Bouleau expresa un punto de vista diferente. Sin hacer referencia a Giotto, Duccio o Cimabue de modo específico, Bouleau argumenta que el libro de Pacioli representó el final de una era más que el principio de otra. Según su opinión, *The Divine Proportion* tan sólo «revela el pensamiento de largos siglos de tradición oral» durante los cuales la Proporción Áurea «se consideró la expresión de la belleza perfecta». Si esto fuera cierto, sería lógico pensar que Cimabue, Duccio y Giotto decidieron usar este aceptado estándar de perfección. Por desgracia, no he hallado evidencia alguna que confirme la opinión de Bouleau. Por el contrario, la historia documentada de la Proporción Áurea no concuerda con la idea según la cual los artistas de los siglos anteriores a la publicación del libro de Pacioli veneraron dicha proporción. Además, todos los estudios serios de las obras de los tres artistas realizados por expertos (*Giotto*, por Francesca Flores D'Arcais; *Cimabue*, por Luciano Bellosi) no ofrecen absolutamente ninguna indicación de que estos pintores utilizaran la Proporción Áurea (la afirmación contraria sólo aparece en los escritos de los entusiastas del Número Áureo, y tan sólo se basa en dudosas evidencias a partir del cálculo de dimensiones).

El otro nombre que aparece invariablemente en casi todos los alegatos que defienden la presencia de la Proporción Áurea en el arte es el de Leonardo da Vinci. Algunos autores incluso le atribuyen la invención del

nombre «la Proporción Divina». Normalmente, la discusión se centra en cinco trabajos del maestro italiano: el lienzo inacabado de *San Jerónimo*, las dos versiones de la *Madonna de las Rocas*, el dibujo de *La cabeza de un anciano* y la famosa *Mona Lisa*. Dejaré a un lado a la «Mona Lisa» por dos razones: ha sido tema de tantos volúmenes de estudios universitarios contradictorios y especulaciones populares que sería virtualmente imposible llegar a cualquier conclusión que no fuera ambigua; y se supone que podemos encontrar la Proporción Áurea en las dimensiones del rectángulo que rodea el rostro de la *Mona Lisa*. En ausencia de ninguna indicación clara (y documentada) que indique con precisión dónde debe dibujarse dicho rectángulo, esta idea representa una nueva oportunidad para seguir manipulando números. De todos modos, regresaré más adelante al tema general de las proporciones en los rostros de Leonardo cuando analice el dibujo de *La cabeza de un anciano*.



Figura 72



FIGURA 73

El caso de los dos versiones de la *Madonna de las Rocas* (una en el Louvre de París, figura 72, y la otra en la National Gallery de Londres, figura 73) no es muy convincente. La proporción de la altura respecto a la anchura de la pintura que se supone anterior (figura 72) es de unos 1, 64 y el de la posterior 1, 58, ambas razonablemente próximas a Φ pero también cercanas a la proporción simple 1, 6.

La datación y autentificación de las dos también colaboró a dar un interesante giro en las afirmaciones sobre la presencia de la Proporción Áurea. Los expertos que estudiaron las dos pinturas concluyeron que, sin lugar a dudas, la versión del Louvre fue realizada completamente por Leonardo, mientras que la ejecución de la versión de la National Gallery pudo ser el resultado de un trabajo en equipo, aunque todavía sigue siendo fuente de debates.

Parece ser que la versión del Louvre fue uno de los primeros trabajos que Leonardo realizó en Milán, probablemente entre 1483 y 1486. La pintura de la National Gallery, por otro lado, suele fecharse alrededor de 1506. La importancia de estas fechas radica en el hecho de que Leonardo conoció a Pacioli en 1496 en la corte de Milán. Según Pacioli, el capítulo setenta y uno de la *Divina* (el final de la primera parte de libro), «finalizó en este día 14 de diciembre, en Milán, todavía recluido, del año 1497». Por tanto, la primera versión (y sobre la que no existen dudas acerca de su autenticidad) de la *Madonna de las Rocas* se terminó unos diez años después de que Leonardo tuviera la oportunidad de oír directamente y de buena tinta todo lo relacionado con la «Proporción Divina». La afirmación de que Leonardo utilizó la Proporción Áurea en la *Madonna de las Rocas*, por tanto, asume que el artista adoptó dicha proporción incluso antes de empezar a colaborar con Pacioli. Aunque no es imposible, no existe ninguna evidencia que apoye esta interpretación.

Ambas versiones de la *Madonna de las Rocas* representan una de las obras maestras más conseguidas de Leonardo. Probablemente, es donde aplicó mejor su fórmula poética: «cada cuerpo opaco está rodeado y arropado en su superficie por sombras y luz». Las figuras del lienzo literalmente se abren a la participación emocional del observador. Al afirmar que la fuerza de estas pinturas deriva de la mera proporción de sus dimensiones, trivializamos innecesariamente el genio de Leonardo. No nos dejemos engañar; la admiración reverente que sentimos al presenciar la *Madonna de las Rocas* tiene poca relación con el debate acerca de si las dimensiones de las pinturas están o no en Proporción Áurea.

También existe una incertidumbre similar respecto al inacabado *San Jerónimo* (figura 74; actualmente en el museo Vaticano). No únicamente la fecha de la pintura es 1483, muy anterior al traslado de Pacioli a Milán, sino que las afirmaciones vertidas en algunas obras (por ejemplo, por parte de David Bergamini y los editores de *Life Magazine's Mathematics*) según las cuales «un Rectángulo Áureo encaja a la perfección alrededor de San Jerónimo» requieren una gran capacidad imaginativa. En realidad, los lados del rectángulo sobrepasan de largo el cuerpo (especialmente por el lado izquierdo) y la cabeza, mientras que el brazo se extiende mucho más allá del lado del rectángulo.

El último ejemplo de una posible utilización de la Proporción Áurea por parte de Leonardo es el dibujo de *La cabeza de un anciano* (figura 75; actualmente en la Galleria dell'Accademia de Venecia). El perfil y el diagrama de las proporciones se dibujaron a lápiz en algún momento cercano a 1490. Aproximadamente en 15031504, se añadieron a la misma página dos estudios de jinetes en tiza roja que se asocian a la pintura de Leonardo *Batalla de Anghiari*. A pesar de que la cuadrícula superpuesta deja claro que Leonardo estaba interesado en diversas proporciones del rostro, es muy difícil establecer conclusiones definitivas a partir de este estudio. El rectángulo situado en la parte central izquierda, por ejemplo, es aproximadamente un Rectángulo Áureo, pero las líneas están dibujadas tan toscamente que no podemos estar del todo seguros. Pese a todo, este dibujo es el que nos ofrece la demostración más clara de que Leonardo utilizó rectángulos para determinar dimensiones en sus obras y que incluso pudo haber considerado la aplicación de la Proporción Áurea en su arte.

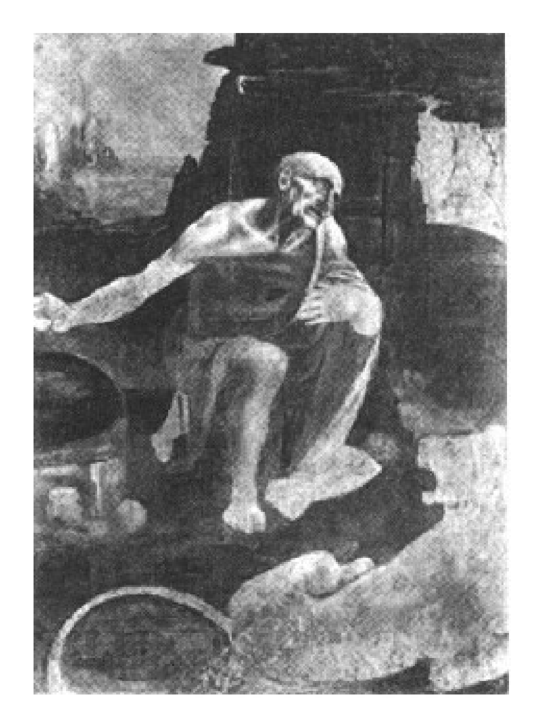


FIGURA 74

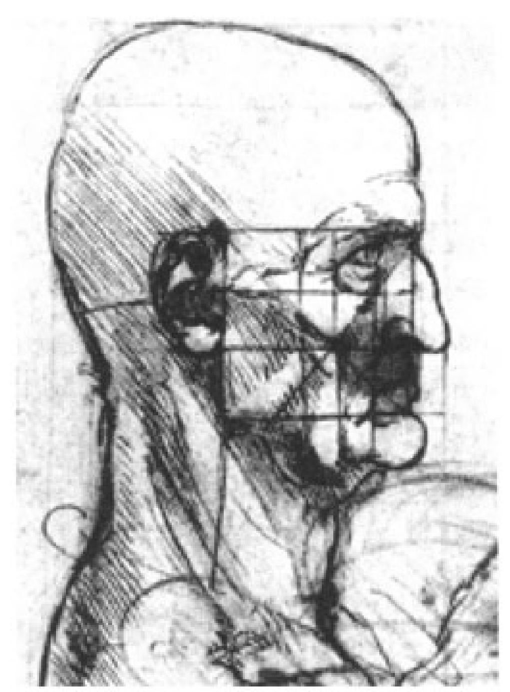


FIGURA 75

Es probable que el interés de Leonardo por las proporciones del rostro pudiera tener otras manifestaciones interesantes. En un artículo aparecido en 1995 en la *Scientific American*, la historiadora del arte y artista de gráficos por ordenador Lilian Schwarz introdujo una especulación interesante al afirmar que en ausencia de modelo para la *Mona Lisa*, Leonardo utilizó sus propios rasgos faciales para completar el retrato. La teoría de Schwarz se basaba en una comparación que llevó a cabo con la ayuda del ordenador entre diversas dimensiones del rostro de la *Mona Lisa* y las dimensiones respectivas de un dibujo a tiza roja que muchos (aunque no todos) consideran que es el único autorretrato de Leonardo. No obstante, como han señalado otros críticos de arte, la similitud de proporciones podría simplemente indicar que Leonardo utilizó la misma fórmula para la proporción (que pudo o no incluir la Proporción Áurea) en ambos dibujos. De hecho, la propia Schwarz señala que en sus obras grotescas (una colección de rostros extravagantes compuestos por exagerados mentones, narices, bocas y frentes), Leonardo utilizó la misma proporción de rostro que en *Cabeza de anciano*.

Si existen serias dudas de que el propio Leonardo, quien no sólo era amigo personal de Pacioli sino también el ilustrador de la *Divina*, usara la Proporción Áurea en sus obras, ¿quiere esto decir que ningún otro artista la utilizó jamás? Evidentemente, no. Con el surgimiento de la literatura académica en torno a la Proporción Áurea hacia finales del siglo XIX, los artistas también empezaron a tenerla en cuenta. No obstante, antes de pasar a hablar de los artistas que sí la utilizaron, primero debemos desmontar otro mito.

A pesar de las muchas afirmaciones de lo contrario, lo más probable es que el puntillista francés Georges Seurat (1859-1891) no usara la Proporción Áurea en sus pinturas. A Seurat le interesaba la visión y combinación de colores, y utilizó la técnica puntillista (de múltiples puntos) para aproximarse lo mejor posible a la cualidad centelleante y vibrante de la luz. Posteriormente también le preocupó el problema de la expresión de emociones específicas mediante recursos pictóricos. En una carta escrita en 1890, Seurat describe sucintamente algunos de sus puntos de vista:

> El arte es armonía. La armonía es la analogía de contradicciones y de semejanzas, en tono, sombra, línea, juzgadas por la que domina a las demás y bajo la influencia de un juego de luces en disposiciones vistosas, luminosas, tristes… Las líneas vistosas son líneas por encima de la horizontal… la calma es la horizontal; las líneas tristes en la inferior.

Seurat hizo uso de estas ideas de modo explícito en *La parada del circo* (figura 76; actualmente en el Metropolitan Museum of Art, Nueva York). Fíjense especialmente en el ángulo recto formado por la balaustrada y en la línea vertical en la mitad derecha de la pintura. Toda la composición se basa en principios que Seurat adoptó del libro del teórico del arte David Sutter titulado *La philosophie des Beaux-Arts appliquée à la peinture* (La filosofía de las bellas artes aplicada a la pintura; 1870). Sutter escribió: «Cuando lo dominante es horizontal, puede colocarse una sucesión de objetos verticales porque dichas series convergerán en la línea horizontal».

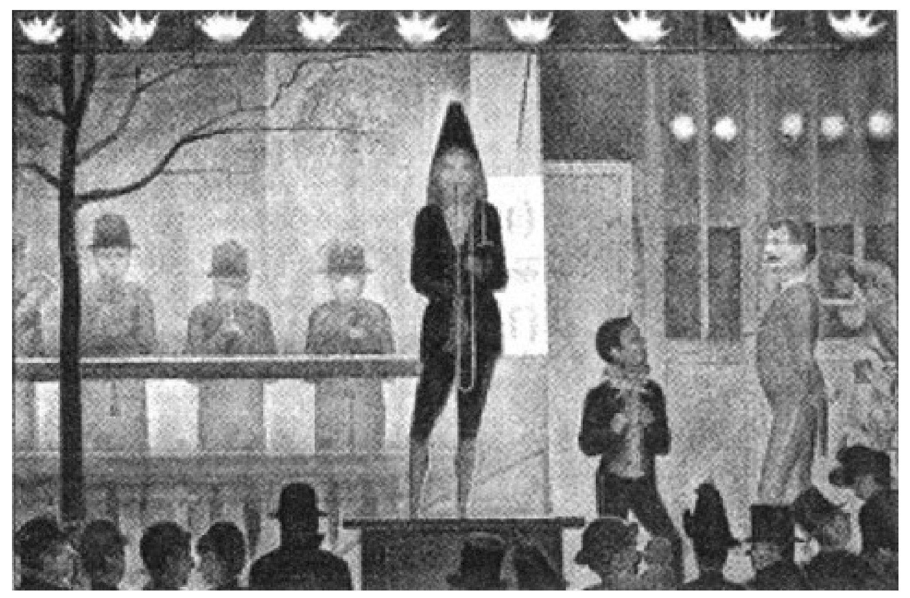


FIGURA 76

Los aficionados a la Proporción Áurea a menudo presentan análisis de *La parada* (así como de otras pinturas como *El circo*) para «demostrar» el uso de Φ. Incluso en el hermoso libro titulado *Matemáticas*, escrito por Bergamini y los editores de *Life Magazine*, podemos leer lo siguiente: «*La parada*, pintada con el característico estilo de puntitos del impresionista francés Georges Seurat, contiene numerosos ejemplos de Proporciones Áureas». El libro va aún más lejos al incluir una cita (atribuida a «un experto en arte») según la cual Seurat «realizó cada lienzo siguiendo la Sección Áurea». Por desgracia, estas afirmaciones están poco fundamentadas. El mito lo propagó el prelado y escritor rumano Matila Ghyka (1881-1965), el «experto en arte» citado por Bergamini. Ghyka publicó dos libros muy influyentes, *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* (Estética de las proporciones en la naturaleza y el arte; 1927) y *Le nombre d'Or: Rites et rythmes pytagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale* (El número áureo, ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización

occidental; 1931). Ambos libros están repletos de interpretaciones seudomísticas de las matemáticas. Junto a descripciones correctas de propiedades matemáticas de la Proporción Áurea, el libro contiene una colección de materiales anecdóticos inexactos respecto a la aparición de la Proporción Áurea en las artes (por ejemplo, el Partenón, las pirámides egipcias, etc.). Inexplicablemente, estos libros han sido muy influyentes.

Por lo que se refiere específicamente a *La parada*, aunque es cierto que la horizontal está seccionada en proporciones cercanas a la Proporción Áurea (de hecho, la proporción simple ocho quintos), no ocurre lo mismo con la vertical. Un análisis de la composición de esta y otras pinturas de Seurat, así como de las obras del pintor simbolista Pierre Puvis de Chavannes (1824-1898), llevó incluso a uno de los abogados de la Proporción Áurea, el pintor y escritor Charles Bouleau, a afirmar que «No creo que podamos, sin forzar las pruebas de la presencia de la Proporción Áurea en sus (Puvis de Chavannes) composiciones. Lo mismo ocurre con Seurat». En 1980, Roger Herz-Fischler, en un análisis minucioso de todos los escritos, bocetos y lienzos de Seurat, llegó a la misma conclusión. Además, el matemático, filósofo y crítico de arte Charles Henry (1859-1926) afirmó tajantemente en 1980 que la Proporción Áurea fue «totalmente ignorada por los artistas contemporáneos».

Entonces, ¿quién utilizó la Proporción Áurea en la pintura o en la teoría de la pintura? Probablemente, el primer artista y analista de arte importante en utilizar la proporción fue Paul Sérusier (1864-1927). Sérusier nació en París, y tras estudiar filosofía, ingresó en la famosa escuela de arte Académie Julian. Tras el encuentro con los pintores

Paul Gaugin y Émile Bernard, éstos le introdujeron en el uso expresivo del color y en el simbolismo. Junto a los pintores post-impresionistas Pierre Bonnard, Édouard Vuillard, Maurice Denis y otros, fundó el grupo Nabis, palabra hebrea que significa «profetas». El nombre se inspiraba en la postura, medio en serio, medio burlesca, de una especie de iluminación religiosa respecto a su nuevo estilo. El compositor Claude Debussy también formaba parte del grupo. Probablemente, Sérusier oyó hablar por primera vez de la Proporción Áurea durante una de sus visitas (entre 1868-1946) a su amigo y pintor holandés Jan Verkade (1868-1946). Verkade era novicio en un monasterio benedictino de Beuron, en el sur de Alemania, donde grupos de pintores-monjes ejecutaban composiciones religiosas más bien torpes de «medidas sagradas», siguiendo las teorías del Padre Didier Lenz. Según su teoría, todas las grandes obras de arte de la antigüedad (es decir, el Arca de Noé, las obras de los egipcios, etc.) se basaban en entidades geométricas simples como el círculo, el triángulo equilátero y el hexágono. A Sérusier le cautivó el encanto de esta teoría, y escribió lo siguiente a Verkade: «Como puedes imaginar, he hablado mucho sobre tus medidas». El pintor Maurice Denis (1870-1943) escribió notas biográficas sobre Sérusier, gracias a las cuales sabemos que dichas «medidas» utilizadas por el Padre Lenz incluían la Proporción Áurea. A pesar de que Sérusier admite que sus primeros estudios de las matemáticas de Beuron «no fueron pan comido», incorporó la Proporción Áurea y su potencial asociación con la Gran Pirámide y las obras de arte griegas en su importante obra sobre teoría del arte *L'ABC de la Peinture* (El ABC de la pintura).

Aunque parece que el interés de Sérusier por la Proporción Áurea fue más filosófico que práctico, utilizó dicha proporción en alguna de sus obras principalmente para «verificar, y a veces para comprobar, sus creaciones de formas y su composición».

Por influencia de Sérusier, el concepto de la Proporción Áurea se propagó a otros círculos artísticos, en especial al de los cubistas. La denominación de «cubismo» fue acuñada por el crítico de arte Louis Vauxcelles (quien, por cierto, también acuñó los términos «Expresionismo» y «Fauvismo») tras asistir a una exposición de Georges Braque en 1908. El movimiento quedó inaugurado con la obra de Picasso *Las señoritas de Aviñón* y con *Desnudo* de Braque. Rebelándose contra el uso apasionado del color y la forma del Expresionismo, Picasso y Braque desarrollaron un estilo austero, casi monocromático, que rechazaba deliberadamente cualquier elemento importante que evocara asociaciones emocionales. Diseccionaron objetos tales como instrumentos musicales e incluso figuras humanas en planos geométricos sin volumen que luego se combinaban en perspectivas cambiantes. Este análisis de las formas sólidas con el objetivo de revelar la estructura, permitía el uso de conceptos geométricos como la Proporción Áurea. De hecho, algunos de los primeros cubistas, como Jacques Villon y sus hermanos Marcel y Raymond Duchamp-Villon, junto a Albert Gleizes y Francis Picabia, en 1912 organizaron en París una exposición con el título de «Section d’Or» (Sección Áurea). A pesar del sugestivo nombre, en realidad ninguna de las pinturas exhibidas incluía la Sección Áurea en el diseño de la composición. De hecho, los organizadores simplemente eligieron el nombre para proyectar el interés general que sentían por cuestiones que vinculaban el arte a la ciencia y la filosofía. No obstante,

algunos cubistas, como el español Juan Gris (1887-1927) y el escultor lituano Jacques (Chaim Jacob) Lipchitz (1891-1973) usaron la Proporción Áurea en algunos de sus postreros trabajos. Lipchitz escribió: «En aquellos momentos me interesaban mucho las teorías sobre proporciones matemáticas, como los otros cubistas, e intenté aplicarlas a mis esculturas. Todos sentíamos gran curiosidad por la idea de una regla áurea o Sección Áurea, un sistema que se suponía que estaba detrás del arte y de la arquitectura de la Grecia antigua». Lipchitz ayudó a Juan Gris en la construcción de la escultura *Arlequín* (actualmente en el Philadelphia Museum of Art; figura 77), en la que los dos artistas utilizaron el triángulo de Kepler (que se basa en la Proporción Áurea; ver figura 61) para la producción de las proporciones deseadas.

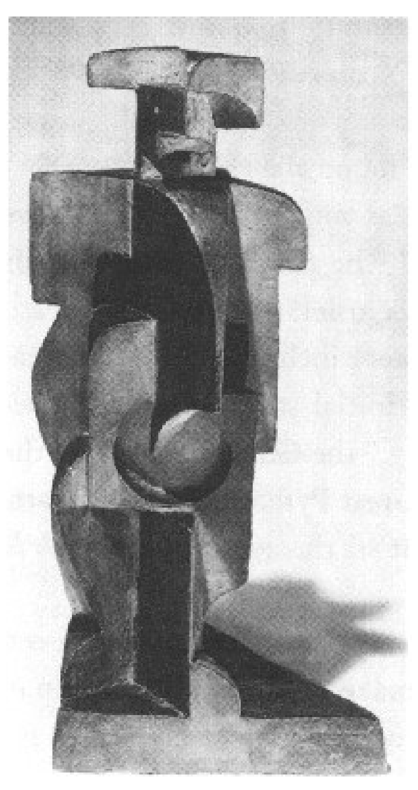


FIGURA 77

Otro artista que utilizó la Proporción Áurea a principios de la década de los años 20 fue el pintor italiano Gino Severini (1883-1966), quien intentó reconciliar en su trabajo los objetivos algo conflictivos del futurismo y del cubismo. El futurismo representaba un esfuerzo por parte de un grupo de intelectuales italianos provenientes de la literatura, las artes visuales, el teatro, la música y el cine, de rejuvenecer culturalmente el país. En palabras de Severini: «Decidimos centrar nuestra atención en las cosas en movimiento porque nuestra moderna sensibilidad está particularmente cualificada para captar la idea de velocidad». El primer manifiesto de los pintores futuristas se firmó en 1910, y urgía de forma contundente a los jóvenes artistas italianos a «despreciar profundamente todo tipo de imitación». A pesar de que el propio Severini era un futurista, encontró en el cubismo la «noción de medida» que mejor encajaba con su ambición de «realizar, a través de la pintura, un objeto con la misma perfección con la que un artesano ebanista confecciona muebles». Esta preocupación de Severini por la perfección geométrica le llevó a utilizar la Sección Áurea en sus bocetos preliminares de diversas obras (*Maternidad*, actualmente en una colección privada de Roma; figura 78).



FIGURA 78

La pintora cubista rusa Maria Vorobëva, conocida como Marevna, nos ofrece una instantánea interesante del papel de la Proporción Áurea en el arte cubista. En *Life with the Painters of La Ruche* (1974) Marevna propone un fascinante relato de la vida y obra de sus amigos personales (un grupo que incluía a pintores como Picasso, Modigliani, Soutine, Rivera —con quien tuvo una hija— y otros artistas del París de 1920). A pesar de que Marevna no ofrece ningún ejemplo específico, y de la inexactitud de algunos de sus comentarios históricos, el texto significa que Picasso, Rivera y Gris habían utilizado la Proporción Áurea como «otra manera de dividir los planos, más compleja y que atrae a mentes más experimentadas y más curiosas».

Otro teórico del arte con gran interés por la Proporción Áurea de principios del siglo XX es el estadounidense Jay Hambidge (1867-1924). En una serie de artículos y libros, Hambidge definió dos tipos de simetría en el arte clásico y

moderno. Uno de ellos, que denominó «simetría estática», se basaba en las figuras regulares como el cuadrado o el triángulo equilátero y se suponía que se utilizaba para producir arte inanimado. El otro, que apodó «simetría dinámica», primaba la Proporción Áurea y la espiral logarítmica. La tesis básica de Hambidge defendía que el uso de la «simetría dinámica» en el diseño llevaba al arte vibrante y en movimiento. Hoy en día, pocos toman en serio sus ideas.

Otro de los más fervientes defensores de la aplicación de la Proporción Áurea en el arte y la arquitectura fue el famoso arquitecto y pintor suizo-francés Le Corbusier (Charles Édouard Jeanneret, 1887-1965).

Jeanneret nació en La Chaux-de-Fonds, Suiza, donde estudió arte y grabado. Su padre trabajaba en el negocio de los relojes como esmaltador y su madre era pianista y profesora de música e impulsó a su hijo a adquirir destreza musical y otras empresas abstractas. Jeanneret empezó los estudios de arquitectura en 1905 y, más adelante, se convirtió en una de las figuras más influyentes de la arquitectura moderna. Durante el invierno de 1916-1917, Jeanneret se trasladó a París, donde conoció a Amédée Ozenfant, quien tenía contactos en el círculo parisino de artistas e intelectuales. Gracias a Ozenfant, Jeanneret conoció a los cubistas y con éstos se vio forzado a enfrentarse a su propia herencia. En particular, de Juan Gris, se empapó del interés por los sistemas proporcionales y su papel en la estética. En otoño de 1918, Jeanneret y Ozenfant expusieron juntos en la Galérie Thomas. En concreto, dos lienzos de Jeanneret se colgaron junto a otras muchas pinturas de Ozenfant. Se autodenominaban «puristas» y titularon a su catálogo *Après le Cubisme* (Después del

cubismo). El purismo recordaba a Piero della Francesca y a la teoría estética platónica al afirmar que «la obra de arte no debe ser accidental, excepcional, impresionista, inorgánica, protestataria, pintoresca; por el contrario, debe ser generalizada, estática, expresiva de lo invariable».

Jeanneret no adoptó el nombre «Le Corbusier» (de los antepasados de la familia materna llamados Lecorbesier) hasta la edad de 33 años, cuando ya estaba bien instalado en París y sentía confianza en su futuro. Es como si quisiera reprimir sus primeros esfuerzos titubeantes y estimular el mito de que su genio arquitectónico había madurado de repente.

En un principio, Le Corbusier expresó un punto de vista escéptico e incluso vengativo respecto a la aplicación de la Proporción Áurea en el arte, advirtiendo en contra del «reemplazo del misticismo de la sensibilidad por la Sección Áurea. De hecho, el exhaustivo análisis que realizó Roger Herz-Fischler de los diseños arquitectónicos y de las pinturas «puristas» de Le Corbusier revela que antes de 1927 éste jamás había utilizado la Proporción Áurea. Esto cambió radicalmente tras la publicación del influyente libro de Matila Ghyka *Estética de las proporciones en la naturaleza y el arte*, y su obra *El número áureo, ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización occidental* (1931) tan sólo sirvió para aumentar los aspectos místicos de Φ aún más. La fascinación de Le Corbusier por la *Estética* y por la Proporción Áurea tiene dos orígenes. Por un lado, fue la consecuencia de su interés por las formas y estructuras básicas subyacentes en los fenómenos naturales. Por otro, al proceder de una familia que le inculcó la educación musical, Le Corbusier fue capaz de apreciar la fascinación pitagórica por una armonía lograda a través de proporciones

numéricas. Según Le Corbusier: «Durante más de treinta años, la savia de las matemáticas ha fluido por las venas de mi obra, como arquitecto y como pintor; la música siempre me acompaña». La búsqueda de Le Corbusier de una proporción estándar culminó con la presentación de un nuevo sistema proporcional denominado el «Modulor».

Se supone que el Modulor proporciona «una medida armónica a la escala humana, aplicable universalmente a la arquitectura y a la mecánica». La anterior cita en realidad no es más que una repetición de la famosa frase de Protágoras (siglo V a.C.): «El hombre es la medida de todas las cosas». Por tanto, siguiendo el espíritu del hombre Vitruviano (figura 53) y del compromiso filosófico general en aras del descubrimiento de un sistema de proporciones equivalente al de la creación natural, el Modulor estaba basado en proporciones humanas (figura 79).

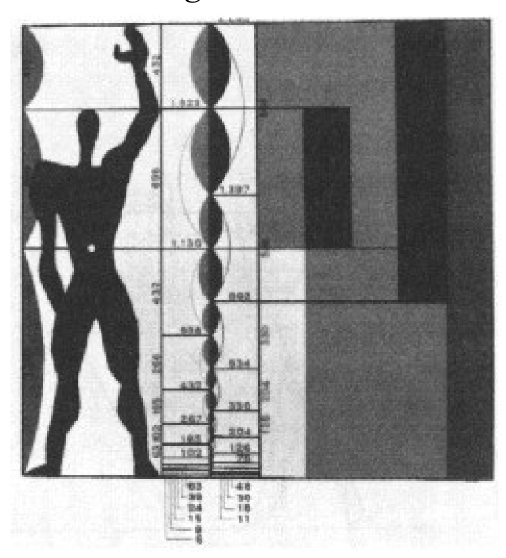


FIGURA 79

Un hombre de seis pies de alto (unos 183 centímetros), algo parecido al familiar logo del «hombre Michelin», con un brazo levantado (a una altura de 226 cm; 7’5”), se inserta

en un círculo (figura 80). La proporción de la altura del hombre (183 cm; 6') respecto a su ombligo (a mitad de 113 cm; 3' 8, 5") se consideró que estaba exactamente en Proporción Áurea. La altura total (desde los pies hasta el brazo alzado) también se dividía en Proporción Áurea (en 140 cm y 86 cm) al nivel de la muñeca del brazo que cuelga. Las dos proporciones (113/70) y (140/86) también se subdividieron en dimensiones menores respecto a las series Fibonacci (cada número es igual a la suma de los dos anteriores; figura 81). En la versión final del Modulor (figuras 79 y 81), por tanto, se introdujeron dos escalas de dimensiones Fibonacci en espirales entrelazadas (las «series roja y azul»).

Le Corbusier sugirió que el Modulor otorgaría proporciones armónicas a todo, desde los tamaños de manillas de muebles y puertas hasta espacios urbanos y edificios. En un mundo con una necesidad creciente de producción en masa, se suponía que el Modulor proporcionaría un modelo de estandarización. Los dos libros de Le Corbusier, *Le Modulor* (publicado en 1948) y *Modulor II* (1955), recibieron gran atención académica por parte de los círculos de arquitectos, y continúan apareciendo en todos los debates sobre la proporción. Le Corbusier estaba muy orgulloso de haber tenido la oportunidad de presentar el Modulor incluso a Albert Einstein, en una reunión en Princeton en 1946. Al describir este acontecimiento, dice: «No supe expresarme, no supe explicar el "Modulor", me atasqué en el embrollo de "causa y efecto"». A pesar de todo, Le Corbusier recibió una carta de Einstein, en la que este gran hombre le dijo lo siguiente sobre el Modulor: «Se trata de una escala de proporciones que convierte lo malo en difícil y lo bueno en fácil».

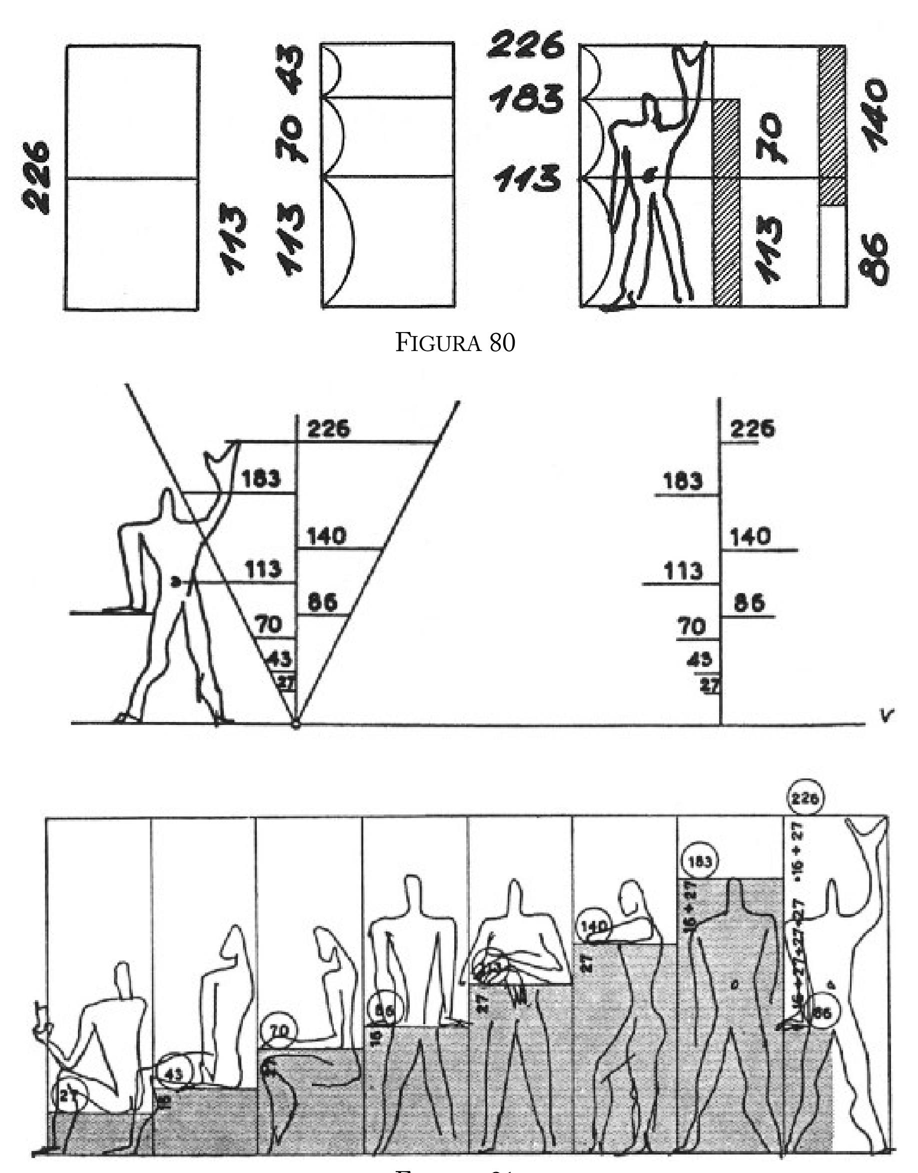


FIGURA 80

FIGURA 81

Le Corbusier puso su teoría del Modulor en práctica en muchos de sus proyectos. Por ejemplo, en las notas que realizó para la impresionante maqueta urbana de Chandigarh, India, que incluía cuatro grandes edificios gubernamentales (un Parlamento, una Corte Suprema y dos museos) encontramos: «Pero, por supuesto, el Modulor

apareció en el momento de dividir la zona de las ventanas… En la sección general del edificio que se ocupa de dar sombra a las oficinas y Cortes, el Modulor ofrecerá unidad de textura en todos los lugares. En el diseño de las fachadas, el Modulor (de la textura) encajará sus series roja y azul en los espacios ya amueblados de los marcos».

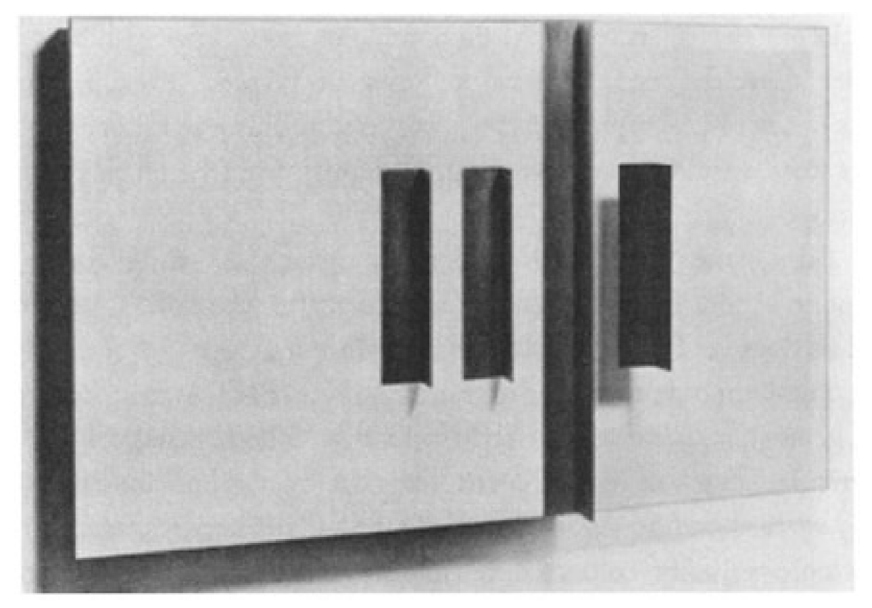


FIGURA 82

Es evidente que Le Corbusier no fue el último artista en interesarse por la Proporción Áurea, pero la mayoría de los que vinieron después estaban más fascinados por los atributos matemático-filosófico-históricos de la proporción que por sus presuntas propiedades estéticas. Por ejemplo, el artista abstracto británico Anthony Hill utilizó una serie Fibonacci de dimensiones en *Constructional Relief* (1960; figura 82). De igual forma, el pintor y escultor contemporáneo israelí Igael Tumarkin ha incluido deliberadamente la fórmula del valor de Φ ($\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$) en una de sus pinturas.

El artista italiano Mario Merz convirtió la secuencia de Fibonacci en un importante ingrediente de su arte. Merz nació en Milán en 1925, y en 1967 se unió al movimiento artístico apodado Arte Povera (Arte Pobre), que también incluía a los artistas Michelangelo Pistoletto, Luciano Fabro y Jannis Kounellis. El nombre de este movimiento (acuñado por el crítico Germano Celant) derivaba del deseo de sus miembros por usar materiales simples de la vida cotidiana como forma de protesta contra lo que consideraban una sociedad deshumanizada y consumista. Merz empezó a usar la secuencia de Fibonacci en 1970, en una serie de trabajos «conceptuales» que incluían los números en la secuencia de varias espirales. El deseo de Merz por utilizar los números Fibonacci residía en el hecho de que en la secuencia subyacen numerosos modelos de crecimiento de la vida natural. En una obra de 1987 titulada *Onda d'urto* (Onda de choque), colocó una larga fila de paquetes de periódico, con los números Fibonacci brillando con luz de neón azul sobre los paquetes. La obra *Fibonacci Nápoles* (1970) consiste en diez fotografías de obreros fabriles, empezando por un obrero hasta un total de cincuenta y cinco (el décimo número Fibonacci) dispuestos en progresión Fibonacci.

Continúan apareciendo como setas, falsas afirmaciones de artistas que supuestamente utilizan la Proporción Áurea. Una de ellas merece especial atención, dado que ha sido repetida hasta la saciedad.

El pintor holandés Piet Mondrian (1872-1944) es más conocido por su estilo geométrico e inobjetivo, que denominó «neoplasticismo». En particular, la mayoría de su arte se caracteriza por composiciones que comprenden sólo líneas verticales y horizontales, rectángulos y cuadrados, y únicamente utiliza colores primarios (y a veces negros o

grises) en fondo blanco, como en *Broadway Boggie-Woggie* (figura 83; en el Museo de Arte Moderno de Nueva York). Eliminó completamente de sus obras las líneas curvas, la tridimensionalidad y la representación realista.

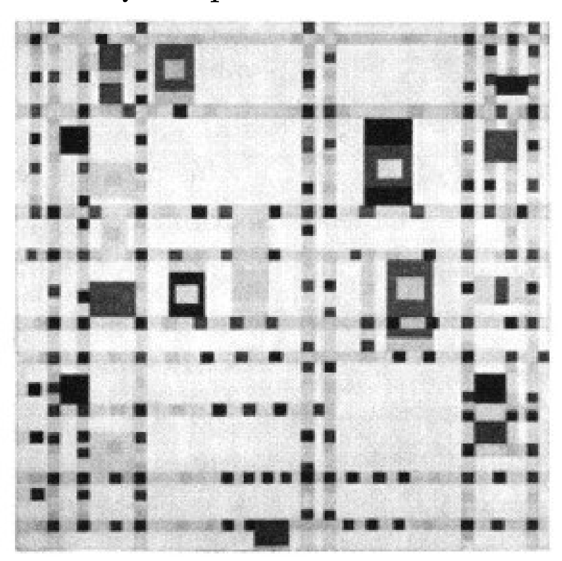


FIGURA 83

Aunque quizá resulte extraño, las composiciones geométricas de Mondrian conllevaron bastantes especulaciones por parte de los Numerólogos Áureos. En *Mathematics*, David Bergamini admite que el propio Mondrian «no dio muchos detalles del diseño de sus pinturas»; sin embargo, afirma que la abstracción lineal de *Plaza de la Concordia* incorpora Rectángulos Áureos superpuestos. Charles Bouleau fue más audaz en *The Painter's Secret Geometry* al afirmar: «Los pintores franceses jamás se atrevieron a ir tan lejos en la geometría pura y el uso estricto de la sección áurea como lo hizo el holandés, frío y poco compasivo, Piet Mondrian». Más adelante, Bouleau también afirma que, en *Broadway Boggie-Woggie*, «casi todas las horizontales y verticales que forman esta pintura están en Proporción Áurea». Con tantas líneas para

escoger, no debería sorprendernos que al menos unas cuantas estuvieran separadas aproximadamente a la distancia adecuada. Tras haber leído las obras más serias dedicadas a la obra de Mondrian y no haber encontrado ninguna mención de la Proporción Áurea, la pregunta que empezó a intrigarme es la siguiente: ¿utilizó Mondrian la Proporción Áurea en sus composiciones, o no? Como último recurso, recurrí al auténtico experto: Yves-Alain Bois, de la Universidad de Harvard, coautor del libro *Mondrian*, obra que acompañó a la exhibición retrospectiva de la obra del artista en 1999. La respuesta de Bois era categórica: «Por lo que sé, Mondrian jamás utilizó un sistema de proporciones (si exceptuamos las cuadrículas modulor que pintó en 1918-1919, aunque en éstas el sistema se dedujo del propio formato de las pinturas: están divididas en unidades de 8 × 8)». Y añade: «También recuerdo vagamente una afirmación de Mondrian en la que se mofaba de los cálculos aritméticos sobre su obra». La conclusión de Bois es la siguiente: «Por lo que se refiere a Mondrian, creo que la Sección Áurea es un tema introducido en la discusión sólo para desvirtuarla».

Toda esta historia intrincada nos deja una pregunta desconcertante. Aparte de la curiosidad intelectual, ¿por qué tantos artistas se plantearían el uso de la Proporción Áurea en sus obras? ¿Es cierto que dicha proporción, que se manifiesta, por ejemplo, en el Rectángulo Áureo, contiene realmente cualidades intrínsecas y estéticamente superiores? Las tentativas para responder sólo a esta pregunta han traído consigo una multitud de experimentos psicológicos y una extensa literatura.

LOS SENTIDOS SE DELEITAN EN LAS COSAS DEBIDAMENTE PROPORCIONADAS

Con las palabras que dan título a esta sección, el filósofo escolástico italiano Santo Tomás de Aquino (circa 1225-1274) intentó capturar la relación fundamental entre la belleza y las matemáticas. Parece ser que el ser humano reacciona placenteramente ante «formas» que poseen ciertas simetrías o que obedecen ciertas reglas geométricas.

En nuestro examen del posible valor estético de la Proporción Áurea, nos centraremos en la estética de formas y líneas muy simples y sin capacidad de representación, dejando de lado materiales visuales complejos y obras de arte. Además, en la mayoría de experimentos psicológicos que describiré, evitaré utilizar el término «bello». En su lugar, utilizaré términos como «placentero» o «atractivo». Con esto evitaré el tener que definir el término «bello», ya que la mayoría de gente sabe perfectamente su significado aunque no sepa exactamente cómo explicarlo.

Numerosos autores han afirmado que el Rectángulo Áureo es el rectángulo más placentero desde un punto de vista estético. El interés moderno por esta cuestión se inició con una serie de publicaciones algo estrafalarias del investigador alemán Adolph Zeising, que aparecieron por primera vez en 1854 con *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers* (Nueva teoría sobre proporciones del cuerpo humano), y que culminaron con la publicación (tras la muerte de Zeising) de un libro monumental, *Der Goldne Schnitt* (La sección áurea), en 1884. En estas obras, Zeising combinó su propia interpretación de las ideas pitagóricas y vitruvianas para argumentar que «la división del cuerpo humano, la estructura de muchos animales caracterizada por construcciones bien desarrolladas, los tipos fundamentales de muchas formas de plantas… los armónicos de los acordes musicales más placenteros y la proporcionalidad de las obras

arquitectónicas y escultóricas más bellas» estaban basadas todas ellas en la Proporción Áurea. Para Zeising, por tanto, la Proporción Áurea ofrecía la llave para penetrar en el conocimiento de todas las proporciones de «las formas más refinadas de la naturaleza y el arte».

Uno de los fundadores de la sicología moderna, Gustav Theodor Fechner (1801-1887), se enfrascó en la verificación de la teoría favorita de Zeising. Fechner es considerado uno de los pioneros de la estética experimental. En uno de sus primeros experimentos, llevó a cabo una encuesta de opinión en la que pidió a todos los visitantes de la Galería Dresden que compararan la belleza de dos pinturas casi idénticas de una Madonna (la *Madonna de Darmstadt* y la *Madonna de Dresden*) que se exhibían juntas. Ambos lienzos se atribuían al pintor alemán Hans Holbein el Joven (1497-1543), pero existía la sospecha de que la *Madonna de Dresden* en realidad era una copia posterior. El experimento fue un fracaso absoluto: de 11.842 visitantes, sólo respondieron el cuestionario 113, mayoritariamente críticos de arte o gente con juicios de valor previos.

Los primeros experimentos de Fechner con rectángulos se remontan a la década de 1860, y los resultados fueron publicados en la década de los 70 y posteriormente reunidos en un libro de 1976 titulado *Vorschule der Aesthetik* (Introducción a la estética). Fechner se rebeló contra un acercamiento desde arriba a la estética —formulación de principios abstractos sobre la belleza—, por lo que defendió el desarrollo de la estética experimental desde abajo. El experimento era muy sencillo: se colocaron diez rectángulos frente a una persona a quien se le pidió que seleccionara el rectángulo más placentero y el menos placentero. La proporción largo-ancho de los rectángulos variaba desde el

cuadrado (una proporción de 1, 00) hasta el rectángulo alargado (una proporción de 2, 5). Tres rectángulos eran más alargados que el Rectángulo Áureo y seis de ellos se acercaban más a un cuadrado. Según la propia descripción de Fechner del experimento, a menudo los sujetos esperaban y titubeaban, rechazando un rectángulo tras otro. Mientras, el investigador les explicaba que debían seleccionar cuidadosamente el rectángulo más placentero, armónico y elegante. En el experimento de Fechner, el 76 por ciento de los sujetos se centraron en los tres rectángulos que tenían proporciones de 1, 75, 1, 62 y 1, 50, con la media en el Rectángulo Áureo (1, 62). El resto de rectángulos recibió menos de un 10 por ciento.

La motivación de Fechner para el estudio del tema no estaba libre de prejuicios. Él mismo admitió que la inspiración para iniciar la investigación tenía su origen en «una visión de un mundo unificado en pensamiento, espíritu y materia, conectado entre sí por el misterio de los números». Aunque nadie acusa a Fechner de haber manipulado los resultados, hay quien especula con la posibilidad de que pudo haber generado de modo inconsciente las circunstancias necesarias para obtener el resultado que deseaba. De hecho, los artículos inéditos de Fechner revelan que llevó a cabo experimentos similares con elipses, y al no haber podido descubrir ningún tipo de preferencia por la Proporción Áurea, no publicó los resultados.

Más adelante, Fechner calculó las dimensiones de miles de libros impresos, marcos de fotografías de galerías, ventanas y otros objetos rectangulares. Los resultados son muy interesantes, y a menudo sorprendentes. Por ejemplo, descubrió que las barajas de cartas alemanas tendían a ser

algo más alargadas que el Rectángulo Áureo, mientras que las francesas lo eran menos. Por otro lado, averiguó que la proporción altura-anchura de cuarenta novelas de la biblioteca pública era próxima a Φ. Descubrió que los lienzos (el área en el interior del marco) eran «significativamente más cortos» que el Rectángulo Áureo. Fechner realizó la siguiente observación (políticamente incorrecta según el estándar actual) sobre la forma de las ventanas: «Sólo las ventanas de las casas de los campesinos suelen ser cuadradas, lo que demuestra que la gente con un nivel de educación inferior prefiere más esta forma que la gente con educación superior». Fechner también afirmó que el punto donde la pieza transversal cruza el poste perpendicular en las cruces de los cementerios la divide, de media, en Proporción Áurea.

Muchos investigadores han llevado a cabo experimentos similares durante el siglo XX, con resultados diversos. Los ardientes entusiastas de la Proporción Áurea normalmente informan de aquellos experimentos que parecen demostrar la idea de una preferencia estética por el Rectángulo Áureo. Sin embargo, los investigadores más cuidadosos ponen de relieve la cruda naturaleza y los defectos metodológicos de muchos de estos experimentos. Algunos creen que los resultados dependen, por ejemplo, de si el lado más largo de los rectángulos estaba situado horizontal o verticalmente, del tamaño y color de los rectángulos, de la edad de los entrevistados, de las diferencias culturales y, especialmente, del método experimental utilizado. En un artículo publicado en 1965, los psicólogos estadounidenses L. A. Stone y L. G. Collins sugirieron que la preferencia por el Rectángulo Áureo que se derivaba de algunos experimentos estaba relacionada con el área del campo visual humano. Estos investigadores

descubrieron que un «rectángulo tipo» dibujado en el interior y alrededor del campo visual binocular de una serie de sujetos tenía una proporción largo-ancho de unos 1, 5, no demasiado alejada de la Proporción Áurea. Experimentos posteriores, sin embargo, no confirmaron las especulaciones de Stone y Collins. En un experimento de 1966 dirigido por H. R. Schiffman, de la Universidad Rutgers, se pidió a una serie de sujetos que «dibujaran el rectángulo más placentero estéticamente» en una hoja de papel. Cuando lo terminaron, se les pidió que orientaran la figura horizontal o verticalmente (respecto al lado más largo) en la posición más placentera. A pesar de que Schiffman descubrió una preferencia mayoritaria por la orientación horizontal, coherente con la forma del campo visual, la proporción media largo-ancho era de unos 1, 9, muy alejada tanto de la Proporción Áurea como del «rectángulo tipo» del campo visual.

El psicólogo Michael Godkewitsch de la Universidad de Toronto puso sobre la mesa dudas aún mayores sobre la noción que consideraba al Rectángulo Áureo el rectángulo más placentero de todos. Ante todo, Godkewitsch dejó claro algo importante: las preferencias medias de un grupo pueden no reflejar de ningún modo el rectángulo más preferido por cada individuo. A menudo, lo que prefiere la mayoría no sería elegido en primer lugar por ninguno de forma individual. Por ejemplo, la marca de chocolate que todo el mundo considera la segunda mejor puede que la media la lleve a alcanzar la primera posición aunque ¡jamás la compraría ninguno de ellos! Por tanto, la primera opción ofrece un cálculo de preferencias más significativo que las listas de preferencias basadas en la media. Godkewitsch también indicó que si la preferencia por la Proporción Áurea

era verdaderamente universal y genuina, entonces debería recibir el mayor número de primeras opciones, sin importar el resto de rectángulos que se presentara a los sujetos.

Godkewitsch publicó en 1974 los resultados de un estudio sobre veintisiete rectángulos con proporciones largo-ancho de tres gamas. En un caso, el Rectángulo Áureo estaba junto al rectángulo más alargado, en otro, estaba en medio, y en el tercero, junto al más corto. Los resultados del experimento demostraron, según Godkewitsch, que la preferencia por el Rectángulo Áureo fue artificiosa debido a su posición en la serie de rectángulos presentados y por el hecho de que en los primeros experimentos se utilizaron listas de preferencias basadas en la media (en lugar de listas de primera opción). Godkewitsch llegó a la conclusión de que «la respuesta a la cuestión de si existe o no, en el mundo occidental, una preferencia *estética* expresable verbalmente para la proporción entre la longitud y la anchura de las formas rectangulares, probablemente sea negativa. La teoría estética tiene pocas razones fundamentadas para poder afirmar que la Sección Áurea es un factor decisivo en la belleza visual formal».

No todo el mundo está de acuerdo con las conclusiones de Godkewitsch. El psicólogo británico Chris McManus publicó en 1980 los resultados de un estudio pormenorizado que utilizaba el método de las comparaciones entre pares en el cual se emite un juicio sobre cada par de rectángulos. Este método se considera superior a otras técnicas experimentales, ya que existe la evidencia de que las listas de preferencias no son más que un proceso de comparaciones entre pares sucesivos. McManus concluyó que «existen bastantes evidencias del fenómeno defendido por Fechner, aunque el método de éste para su demostración es, en el

mejor de los casos, sospechoso de manipulación metodológica». McManus admitió, sin embargo, que «no está muy claro que la Sección Áurea sea importante *per se* cuando se comparan proporciones similares (por ejemplo, 1, 5, 1, 6 o incluso 1, 75)».

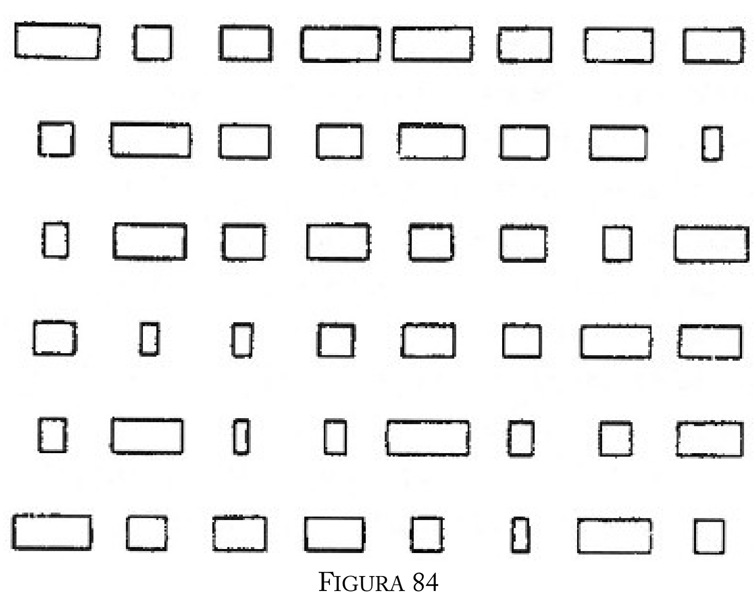


FIGURA 84

Usted mismo (o sus amigos) puede probar a elegir el rectángulo que más le guste. La figura 84 muestra una serie de cuarenta y ocho rectángulos, todos de la misma altura pero con una anchura que va desde 0, 4 a 2, 5 veces su altura. George Markowsky, matemático de la Universidad de Maine, utilizó esta serie en sus propios experimentos informales. ¿Ha elegido como primera opción el Rectángulo Áureo? (Es el quinto empezando por la izquierda de la cuarta fila).

MÚSICA ÁUREA

Hoy en día, todos los cuartetos de cuerda y orquestas sinfónicas utilizan el descubrimiento de Pitágoras sobre las relaciones de los números enteros con los tonos musicales. Además, desde la antigua Grecia hasta la Edad Media, la

música se consideraba una parte de las matemáticas, y los músicos concentraban sus esfuerzos en comprender la base matemática de los tonos. El concepto de la «música de las esferas» representó una síntesis fabulosa entre la música y las matemáticas, y en la imaginación de músicos y matemáticos, urdió la totalidad del cosmos en un gran diseño que sólo podían percibir los elegidos. En palabras del gran orador y filósofo romano Cicerón (circa 106-43 a.C.): «Los oídos de los mortales están llenos de este sonido, pero son incapaces de oírlo… Es lo mismo que intentar mirar el sol directamente; sus rayos son más potentes que tus ojos». No fue hasta el siglo XII cuando la música se desligó de las prescripciones y fórmulas matemáticas. No obstante, incluso en el siglo XVIII, el filósofo racionalista alemán Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) escribió lo siguiente: «La Música es un ejercicio aritmético secreto y la persona que se entrega a ella no se da cuenta de que está manipulando números». En esta misma época, el gran compositor alemán Johann Sabastian Bach (1685-1750) quedó fascinado por un tipo de juegos que pueden jugarse con notas musicales y números. Por ejemplo, Bach encriptó su firma en algunas de sus composiciones mediante códigos musicales. En la notación musical alemana, B es Si bemol, de modo que Bach pudo deletrear su nombre en notas musicales del siguiente modo: B (Si bemol), A (La), C (Do), H (Si natural). Otra encriptación utilizada por Bach se basaba en la Gematría. Si cogemos A = 1, B = 2, C = 3, etc., B-A-C-H = 14 y J-S-B-A-C-H = 41 (porque en el alfabeto alemán de la época de Bach la I y la J eran la misma letra). En su entretenido libro *Bachanalia* (1994), Eric Altschuler, matemático y entusiasta de Bach, ofrece numerosos ejemplos de la aparición del 14 (BACH en código) en la música de Bach que, cree, fueron colocados a propósito por

el músico. Por ejemplo, en la primera fuga, la Fuga en Do Mayor, del Primer Libro *El Clave Bien Temperado*, el tema tiene catorce notas. Además, de las veinticuatro entradas, veintidós llegan hasta el final y veintitrés casi hasta el final. Sólo la decimocuarta entrada concluye mucho antes del final. Según las especulaciones de Altschuler, la obsesión de Bach por encriptar su firma en las composiciones sería similar a la de los artistas que incorporan su propio retrato en sus lienzos o a la de los cameos de Alfred Hitchcock en cada una de sus películas.

Dada esta relación histórica entre la música y los números, la pregunta natural que cabría hacerse es si la Proporción Áurea (y los números Fibonacci) influyeron en el desarrollo de los instrumentos musicales o en la composición musical.

El violín es un instrumento en el que aparece a menudo la Proporción Áurea. Generalmente, la caja de resonancia del violín contiene doce o más arcos de curvatura (lo que provoca la curvatura del violín) en cada lado. El arco plano de la base a menudo está centrado en la Sección Áurea que marca el centro de la línea.

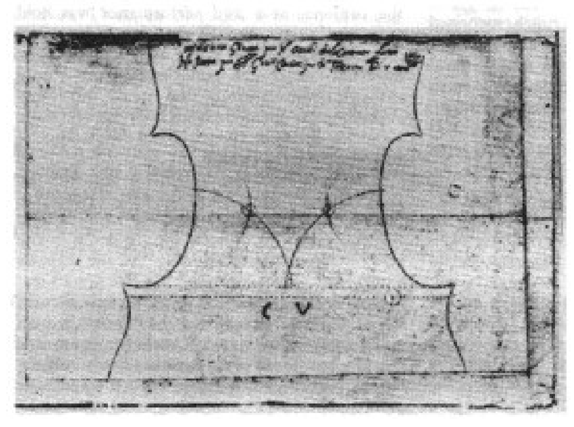


FIGURA 85

Algunos de los mejores violines fueron construidos por Antonio Stradivari (1644-1737) en Cremona, Italia. Los dibujos originales (figura 85) indican que Stradivari dedicó una especial atención a colocar los «ojos» de los orificios en forma de f geométricamente en posiciones determinadas por la Proporción Áurea. Son pocos (si es que hay alguien) los que creen que la aplicación de la Proporción Áurea es la responsable de la superior calidad del violín Stradivarius. La mayor parte de las veces, los potenciales ingredientes «secretos» citados son el barniz, la cola, la madera o la habilidad del artesano. Muchos expertos coinciden en señalar que la popularidad de los violines del siglo XVIII, en general proviene de su adaptabilidad para el uso en grandes salas de concierto. La mayor parte de dichos expertos, también suele comentar que no existe ningún «secreto» en los violines Stradivarius; tan sólo son obras de arte inimitables, la suma de una serie de partes realizadas mediante un dominio artesanal supremo.

Otro instrumento musical que suele mencionarse en relación con los números Fibonacci es el piano. La octava de un teclado está formada por trece teclas, ocho blancas y cinco negras (figura 86). Las cinco negras forman a su vez un grupo de dos y otro de tres teclas. Los números 2, 3, 5, 8 y 13 resulta que son todos ellos números Fibonacci consecutivos. La primacía de la escala en Do mayor, por ejemplo, se debe, en parte, a que se toca con las teclas blancas. De todos modos, la relación existente entre las teclas del piano y los números Fibonacci probablemente es un tema introducido en la discusión sólo para desvirtuarla. En primer lugar, fíjese en que la escala cromática (en la figura, desde C a H), fundamental para la música occidental, en realidad está formada por doce semitonos y no trece. La misma nota, C (Do), se toca dos veces en la octava para

indicar que se ha completado el ciclo. En segundo lugar, y lo que es más importante, la disposición de las notas en dos filas, con los sostenidos y bemoles agrupados en dos y tres teclas en la fila superior, se remonta a principios del siglo XV, mucho antes de la publicación del libro de Pacioli e incluso mucho antes de cualquier estudio serio sobre los números Fibonacci.

Del mismo modo que los Numerólogos Áureos afirman que la Proporción Áurea tiene propiedades estéticas especiales en las artes visuales, también le atribuyen efectos particularmente placenteros en la música. Por ejemplo, los libros sobre la Proporción Áurea sostienen que son muchos los que consideran a la sexta mayor y a la sexta menor, ambas relacionadas con la Proporción Áurea, los dos intervalos musicales más placenteros. Un tono musical puro se caracteriza por una frecuencia fija (medida por el número de vibraciones por segundo) y por una amplitud fija (la cual determina el volumen instantáneo). El tono estándar utilizado para la afinación es A (La), la cual vibra a 440 veces por segundo. Se puede obtener una sexta en La mayor de la combinación de La con Do, y esta última nota se produce con una frecuencia de unas 260 vibraciones por segundo. La proporción de ambas notas, 440/260, se reduce a 5/3, la proporción de dos números Fibonacci. Se puede obtener una sexta menor de un Do alto (528 vibraciones por segundo) y un Mi (330 vibraciones por segundo). En este caso, la proporción 528/330 se reduce a 8/5, lo que también resulta una proporción de dos números Fibonacci y también muy cercana a la Proporción Áurea. (Las proporciones de números Fibonacci consecutivos se acercan a la Proporción Áurea.) De todos modos, como ocurre en la pintura, fíjense en que, también en este caso, el concepto del «intervalo musical más placentero» resulta bastante ambiguo.

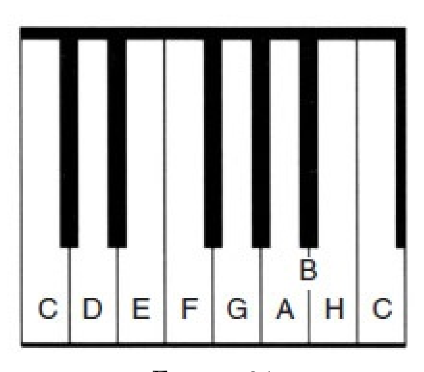


FIGURA 86

Los instrumentos musicales con notas fijas, como el piano, se afinan según una «escala temperada» que popularizó Bach y en la cual cada semitono tiene una proporción de frecuencia igual al siguiente semitono, lo que hace que sea fácil de tocar en cualquier tecla. La proporción de dos frecuencias adyacentes en un instrumento bien temperado es $2^{1/12}$ (la doceava raíz de dos). ¿Cómo se derivó este número? De hecho, sus orígenes pueden rastrearse hasta la antigua Grecia. Recuerde que una octava se obtenía al dividir una cuerda en dos partes iguales (una proporción de frecuencia de 2:1), y una quinta mediante una proporción de frecuencia de 3:2 (básicamente usando dos tercios de una cuerda). Una de las preguntas que más intrigó a los pitagóricos fue si al repetir el procedimiento para crear una quinta (aplicando la proporción de frecuencia 3/2 de forma consecutiva) se podía generar un número entero de octavas. En términos matemáticos, esto es lo mismo que preguntar: ¿Existen dos números enteros n y m tales que $(3/2)^n$ sea igual a 2^m? Parece ser que, aunque no existen dos números enteros que encajen perfectamente en dicha igualdad, $n = 12$ y $m = 7$ se acercan mucho debido a la coincidencia de que $2^{1/12}$ es prácticamente igual a $3^{1/19}$ (la decimonovena raíz de 3). Las doce frecuencias de la octava son, por tanto, todas

ellas potencias aproximadas de la proporción de frecuencia básica $2^{1/12}$.Por cierto, resulta asombroso que la proporción de 19/12 sea igual a 1, 58, no demasiado lejos de Φ.

Otra forma en que la Proporción Áurea podría, en principio, contribuir a la satisfacción de una pieza musical es a través del concepto de equilibrio proporcional. No obstante, en este caso, la situación es algo más tramposa que en el de las artes visuales. Una pintura torpemente proporcionada destacará al instante grotescamente en una exposición. En el caso de la música, por el contrario, debemos escuchar la pieza completa antes de emitir un juicio. Sin embargo, no existe ninguna duda de que los compositores experimentados diseñan la estructura de la obra de modo tal que no sólo las diversas partes encajan entre sí, sino que cada una de ellas aisladamente se convierte en un perfecto receptáculo del argumento musical.

Hemos presenciado muchos ejemplos en que los entusiastas de la Proporción Áurea escrutaban las proporciones de numerosas obras de las artes visuales para descubrir aplicaciones potenciales de Φ. Estos aficionados han realizado escrutinios similares con composiciones musicales. Los resultados son muy parecidos: junto a algunas utilizaciones reales de la Proporción Áurea en tanto que sistema de proporciones, encontramos multitud de probables conceptos erróneos.

Paul Larson, de la Universidad de Temple, afirmó en 1978 que había descubierto la Proporción Áurea en la música occidental más antigua registrada: las salmodias «kirie» de la colección de cantos gregorianos conocidos como Liber Usualis. Las treinta salmodias kirie de la colección cubren un periodo de más de seiscientos años, empezando por el siglo X. Según Larson, había encontrado

un «acontecimiento» significativo (el comienzo y final de una frase musical) en la separación en Proporción Áurea de 105 de las 146 secciones de los kiries que había analizado. No obstante, en ausencia de ninguna justificación histórica que la apoye ni de ninguna razón fundamental convincente para el uso de la Proporción Áurea en dichos cantos, me temo que se trata de otro juego malabar numérico.

En general, contar notas y pulsaciones revela varias correlaciones numéricas entre diferentes secciones de la obra musical, por lo que el analista se enfrenta a una tentación comprensible que le puede llevar a concluir que el compositor introdujo relaciones numéricas. No obstante, sin una base documental sólida (que muy a menudo encontramos a faltar), tales afirmaciones resultan dudosas.

En 1995, el matemático John F. Putz del Alma College, Michigan, intentó averiguar si Mozart (1756-1791) había utilizado la Proporción Áurea en los veintinueve movimientos de sus sonatas para piano compuestas por dos secciones marcadas. Generalmente, estas sonatas están compuestas por dos partes: la Exposición, en la cual se introduce por primera vez el tema musical, y el Desarrollo y Recapitulación, donde se desarrolla y revisita el tema principal. Dado que las piezas musicales están divididas en unidades de tiempo iguales llamados *compases*, Putz examinó las proporciones del número de compases de las dos secciones de las sonatas. Mozart, quien «sólo habló y pensó sobre cifras» durante el tiempo que asistió a la escuela (según el testimonio de su hermana), probablemente se trate del mejor candidato para la utilización de las matemáticas en sus composiciones. De hecho, varios artículos anteriores han proclamado que las sonatas para piano de Mozart reflejan la Proporción Áurea. Los primeros resultados de Putz parecían

muy prometedores. En la *Sonata Nº 1 en Do Mayor*, por ejemplo, el primer movimiento está compuesto por sesenta y dos compases en el Desarrollo y Recapitulación y treinta y ocho en la Exposición. La proporción 62/38 = 1, 63 se acerca mucho a la Proporción Áurea. De todos modos, un examen pormenorizado de todos los datos convencieron a Putz de que Mozart *no* utilizó la Proporción Áurea en sus sonatas, ni tampoco quedó claro por qué la simple cuestión de los compases proporcionaba un efecto placentero. Por tanto, parece ser que aunque son muchos los que creen que la música de Mozart es realmente «divina», la «Proporción Divina» no forma parte de ella.

Un famoso compositor que sí pudo haber utilizado la Proporción Áurea de forma extensa es el húngaro Béla Bartók (1881-1945). Bartók, un virtuoso pianista y folklorista, fusionó elementos de otros compositores que admiraba (incluyendo a Strauss, Liszt y Debussy) con música popular, para crear una música altamente personal. En una ocasión comentó que «el mundo melódico de mis cuartetos de cuerda no difiere demasiado del de las canciones populares». La vitalidad rítmica de su música, combinada con una simetría formal bien calculada, se unieron para hacer de Bartók uno de los compositores más originales del siglo XX.

El musicólogo húngaro Ernö Lendvai investigó sin descanso la música de Bartók y publicó muchos libros y artículos sobre el tema. Lendvai asegura que «a partir del análisis estilístico de la música de Bartók, he podido concluir que el elemento principal de su técnica cromática se debe, en todos los casos, a las leyes de la Sección Áurea».

Según Lendvai, la habilidad de Bartók con el ritmo de sus composiciones proporciona un ejemplo excelente de la utilización de la Proporción Áurea. Mediante el análisis de la fuga de *Música para cuerda, percusión y celesta*, por ejemplo, Lendvai muestra que los ochenta y nueve compases del movimiento están divididos en dos partes, una con cincuenta y cinco compases y otra con treinta y cuatro, por la punta piramidal (en términos de volumen) del movimiento. Las siguientes divisiones vienen marcadas por la colocación y extracción de los sordini (la sordina de los instrumentos) y por otros cambios textuales (figura 87). Todos los números de compases son números Fibonaci, con las proporciones de las partes mayores (55/34) cercanas a la Proporción Áurea. De forma similar, en la *Sonata para dos pianos y percusión*, los diversos temas desarrollados en Fibonacci/Proporción Áurea se ordenan según el número de semitonos (figura 88).

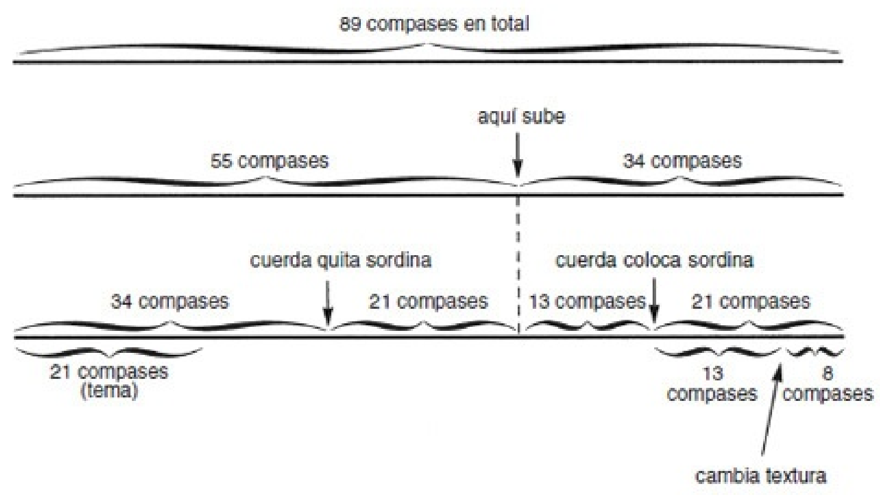


FIGURA 87

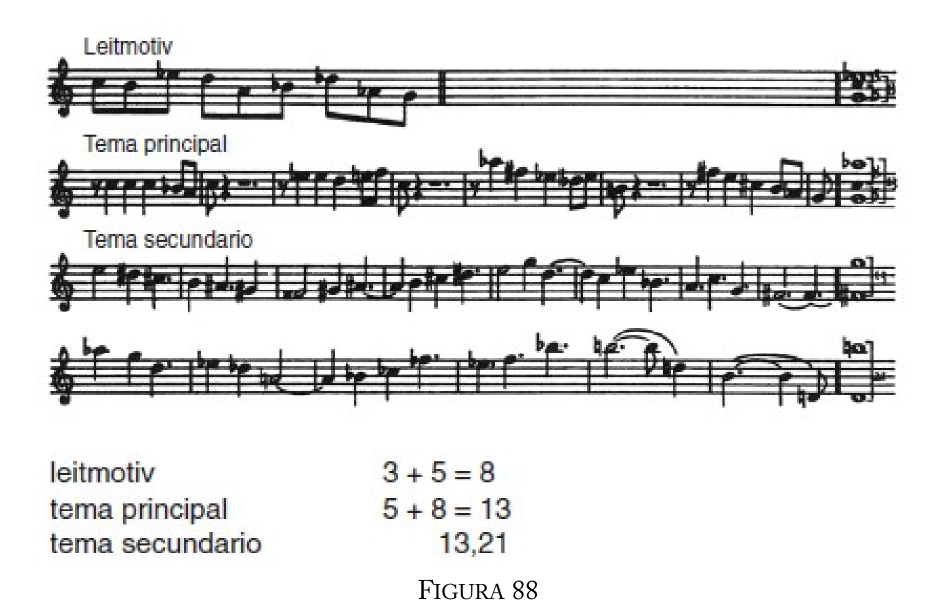


FIGURA 88

Muchos musicólogos no aceptan los análisis de Lendvai, y este mismo ha admitido que Bartók no dijo nada o muy poco sobre sus propias composiciones al afirmar: «Dejad que mi música hable por mí; no reclamo los derechos de ninguna explicación de mis obras». El hecho de que Bartók no dejara ningún boceto que indique si derivó los ritmos y escalas numéricamente convierte en sugestivo cualquier análisis. Además, Lendvai elude la pregunta de si Bartók utilizó la Proporción Áurea de forma consciente. El musicólogo húngaro Laszlo Somfai, en el libro *Béla Bartók: Composition, Concepts and Autograph Sources*, descarta totalmente la posibilidad de que Bartók utilizara la Proporción Áurea. Mediante un análisis detallado de unas 3.600 páginas (que le mantuvo ocupado tres décadas), Somfai concluye que Bartók compuso sin ninguna teoría musical preconcebida. Otros musicólogos, incluido Ruth Tatlow y Paul Griffiths, también califican al estudio de Lendvai como «dudoso».

En el interesante libro *Debussy in Proportion*, Roy Howat, de la Universidad de Cambridge, sugiere que el compositor francés Claude Debussy (1862-1918), cuyas innovaciones armónicas tuvieron una profunda influencia en generaciones de compositores, utilizó la Proporción Áurea en numerosas composiciones. Por ejemplo, en el solo de piano titulado *Reflets dans l'eau* (Reflejos en el agua), una parte de la serie *Images*, la primera reanudación del rondo se produce en el compás 34, es decir, en el punto de la Proporción Áurea entre el comienzo de la pieza y el inicio de la sección climática tras el compás 55. Tanto 34 como 55 son, por supuesto, números Fibonacci, y la proporción 34/21 es una buena aproximación a la Proporción Áurea. La misma estructura se repite en la segunda parte, la cual se divide en una proporción 24/15 (igual a la proporción de los dos números Fibonacci 8/5, de nuevo cerca de la Proporción Áurea; figura 89). Howat encontró divisiones similares en los tres bocetos sinfónicos *La Mer* (El mar), en la pieza para piano *Jardins sous la Pluie* (Jardines bajo la lluvia) y en otras obras.

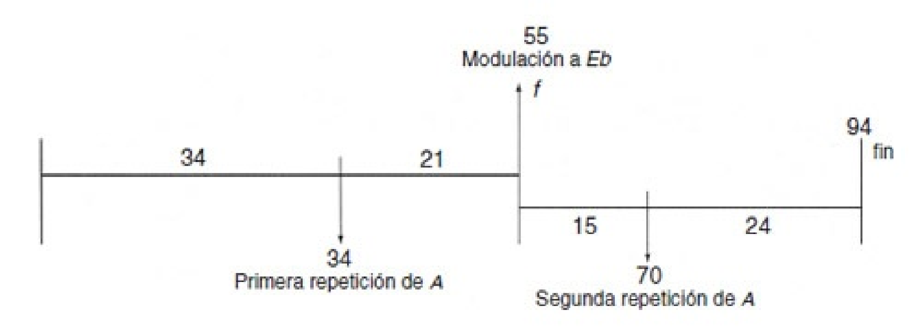


FIGURA 89

Conociendo la historia de *La Mer*, debo admitir que se me hace difícil creer que Debussy utilizara algún diseño matemático en la composición de esta pieza en concreto. Debussy empezó *La Mer* en 1903, y en una carta que

escribió a su amigo André Messager dice: «Quizá no sepas que mi destino era ser marinero y que sólo el azar ha querido dirigirme en otra dirección. Sin embargo, continúo sintiendo una gran pasión por él (el mar)». En el momento en que terminó *La Mer*, 1905, su vida había experimentado un vuelco. Había abandonado a su primera mujer, *Lily* (su nombre auténtico era Rosalie Texier), por la fascinante Emma Bardac; *Lily* se intentó suicidar, y tanto ésta como Bardac llevaron al compositor ante los tribunales. Al escuchar *La Mer* —probablemente su obra más personal y apasionada—, podrá percibir no sólo un retrato musical del mar, quizás inspirado en el trabajo del pintor inglés Joseph Mallord William Turner, sino también una expresión del tumultuoso periodo de la vida del compositor.

Dado que Debussy no dijo mucho sobre su técnica compositiva, debemos mantener una clara distinción entre lo que debe ser una interpretación forzada impuesta a la composición y la intención real y consciente del compositor (lo que todavía no sabemos). Para apoyar este análisis, Howat confía sobre todo en dos evidencias circunstanciales: la relación de Debussy con algunos de los pintores simbolistas que se sabe estaban interesados en la Proporción Áurea y una carta que escribió en agosto de 1903 a su editor, Jacques Durand. En dicha carta, que acompañaba a las pruebas corregidas de *Jardins sous la Pluie*, Debussy habla de un compás que faltaba en la composición: «De todos modos, es necesario, en cuanto al número; el número divino». La implicación de esto no es únicamente que Debussy estuviera construyendo su estructura armónica con números en general sino que el «número divino» (que se supone se relaciona con la Proporción Áurea) jugaba un papel importante.

Howat también sugiere que Debussy estaba influido por los escritos del matemático y crítico de arte Charles Henry, quien tenía gran interés en las relaciones numéricas inherentes a la melodía, armonía y ritmo. Las publicaciones de Henry sobre estética, como *Introduction à une esthétique scientifique* (Introducción a una estética científica; 1885), otorgaron un papel central a la Proporción Áurea.

Es probable que no sepamos jamás con total seguridad si este gran pilar del modernismo francés pretendió realmente utilizar la Proporción Áurea para controlar las proporciones formales. Uno de sus pocos estudiantes de piano, Mademoiselle Worms de Romilly, escribió en una ocasión que «siempre se lamentaba de no haberse dedicado a la pintura en lugar de a la música». La estética musical altamente original de Debussy pudo haberse apoyado, hasta cierto punto, en la aplicación de la Proporción Áurea, pero es evidente que ésta no fue la principal fuente de su creatividad.

Sólo como curiosidad, los nombres de Debussy y Bartók están relacionados con una anécdota sorprendente. Durante una visita del joven compositor húngaro a París, el gran profesor de piano Isidore Philipp se ofreció para presentar a Bartók al compositor Camille Saint-Saëns, en aquella época considerado una gran celebridad. Bartók rechazó el ofrecimiento. Entonces, Philipp le ofreció presentarle al gran organista y compositor Charles-Marie Widor, pero Bartók volvió a declinar el ofrecimiento. «Bueno», le dijo Philipp, «si no quiere conocer a Saint-Saëns ni a Widor, ¿a quién le gustaría conocer?» «Debussy», contesto Bartók. «Pero si es un hombre horrible», dijo

Philipp. «Odia a todo el mundo y seguro que será descortés con usted. ¿Quiere que le insulte?» «Sí», contestó Bartók sin dudarlo.

La introducción de tecnologías de grabación y la música por ordenador en el siglo XX aceleraron los cálculos numéricos precisos y, por tanto, estimularon la música basada en números. El compositor austriaco Alban Berg (1885-1935), por ejemplo, construyó todo su *Kammerkonzert* alrededor del número 3: unidades de treinta compases en tres temas con tres «colores» básicos (piano, violín y viento). El compositor francés Olivier Messiaen (1908-1992) usó números conscientemente (para determinar el número de movimientos, por ejemplo) en las construcciones rítmicas. Sin embargo, cuando en 1978 se le preguntó específicamente sobre la Proporción Áurea, negó que hubiera hecho uso de ella.

El compositor colorista, matemático y profesor Joseph Schillinger (1895-1943) ejemplificó por su propia personalidad y enseñanzas la visión platónica de la relación entre las matemáticas y la música. Tras estudiar en el Conservatorio de San Petersburgo, y dar clases y componer en las academias estatales de Kharkov y Leningrado, se estableció en los Estados Unidos en 1928, donde se convirtió en profesor tanto de matemáticas como de música en varias instituciones, incluyendo la Universidad de Columbia y la de Nueva York. El famoso compositor y pianista George Gershwin, el clarinetista y director de orquesta Benny Goodman y Glenn Miller fueron todos ellos estudiantes de Schillinger quien creía firmemente en la base numérica de la música y, de forma concreta, desarrolló un Sistema de Composición Musical en el que notas sucesivas de la melodía, seguían intervalos Fibonacci al ser contados

en unidades de semitono (figura 90). Para Schillinger, estos saltos Fibonacci de las notas, transmitían el mismo sentido de armonía que las proporciones filotácticas de las hojas en el tallo transmitían a los botánicos. Schillinger halló «música» en los lugares más extraños. En *Joseph Schillinger: A Memoir*, la biografía escrita por su viuda Frances, el autor explica la historia de una excursión en coche durante una tormenta: «El golpeteo de la lluvia tiene su ritmo y los limpiaparabrisas un modelo rítmico. Eso es arte inconsciente». Uno de los intentos de Schillinger para demostrar que la música podía estar basada completamente en formulaciones matemáticas fue especialmente divertido. Copió las fluctuaciones del mercado de valores del *New York Times* en papel cuadriculado, trasladando las subidas y bajadas a intervalos musicales proporcionales, y demostró que se podía obtener una composición similar a alguna de las del gran Johann Sebastian Bach.

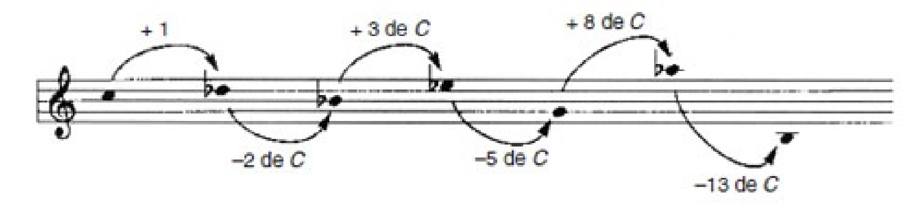


FIGURA 90

La conclusión de este breve recorrido por el mundo de la música es que las afirmaciones sobre la utilización de la Proporción Áurea por parte de ciertos compositores, a menudo saltan demasiado deprisa de números generados por una simple cuenta (compases, notas, etc.) a la interpretación. Sin embargo, existen pocas dudas de que en el siglo XX en especial se produjo un interés renovado en el uso de los números en la música. Como parte de este renacimiento pitagórico, la Proporción Áurea también empezó a aparecer de forma prominente en las obras de varios compositores.

El crítico musical vienés Eduard Hanslick (1825-1904) expresó la relación existente entre la música y las matemáticas de forma espléndida en su libro *The Beautiful in Music*:

> La «música» de la naturaleza y la música del hombre pertenecen a dos categorías distintas. La traducción de una a otra pasa por la ciencia de las matemáticas. Una proposición importante y fecunda. No obstante, nos equivocaremos si pretendemos construirlo del mismo modo en que el hombre formuló el sistema musical siguiendo cálculos predeterminados, ya que el sistema deriva de la aplicación inconsciente de conceptos preexistentes sobre la cantidad y la proporción, a través de procesos sutiles de medición y cálculo; pero las leyes por las que se gobierna este último se demostraron, consecuentemente, mediante la ciencia.

PITÁGORAS LO PLANEÓ

Con estas palabras, el poeta irlandés William Butler Yeats (1865-1939) comenzaba su poema The Statues. Yeats, quien en una ocasión afirmó que «la auténtica esencia del genio, del tipo que sea, es la precisión», examina en el poema la relación existente entre los números y la pasión. La primera estrofa dice así:

Pitágoras lo planeó. ¿Por qué la gente miraba fijamente?
Sus cifras, aunque se movían o parecían moverse
en mármol o bronce, carecían de corazón.
Pero los jóvenes, pálidos por el amor anidado
en solitarios lechos, sabían que la pasión
podía despertar el corazón suficiente.
Y urgían a medianoche en algún lugar público,
los labios vivos sobre un rostro armónico.

Yeats enfatiza de forma hermosa el hecho de que mientras para algunos las proporciones calculadas de las esculturas griegas resultan frías, el joven y apasionado las considera la personificación de los objetos que ama.

A primera vista, nada parece más alejado de las matemáticas que la poesía. Creemos que el nacimiento de un poema de la imaginación del poeta debe ser tan inasible como el nacimiento de una rosa roja. De todos modos, recuerde que de hecho el crecimiento de los pétalos de la rosa se produce siguiendo un modelo bien orquestado basado en la Proporción Áurea. ¿También la poesía puede construirse sobre esta base?

En principio, existen al menos dos formas de unir la Proporción Áurea y los números Fibonacci con la poesía. En primer lugar, pueden existir poemas cuyo tema sea la propia Proporción Áurea o los números Fibonacci (por ejemplo, *Constantly Mean* de Paul Bruckman, presentado en el capítulo 4) o sobre formas geométricas o fenómenos muy relacionados con la Proporción Áurea. En segundo lugar, puede haber poemas que utilicen de algún modo la Proporción Áurea y los números Fibonacci para construir la forma, modelo o ritmo.

Ejemplos del primer tipo los encontramos en un poema cómico de J. A. Lindon, en el poema dramático *Fausto* de Johann Wolfgang von Goethe y en el de Oliver Wendell Holmes *The Chambered Nautilus*.

Martin Gardner utilizó el poema corto de Lindon para abrir el capítulo sobre Fibonacci en su libro *Mathematical Circus*. Al referirse a la relación recursiva que define la secuencia Fibonacci, el poema reza:

Cada mujer de Fibonacci
No comiendo nada que no fuera rígido,
Pesando tanto como los dos frente a ella,
Su quinto era alguna signora!

De modo similar, dos líneas de un poema de Katherine O'Brien dicen lo siguiente:

Fibonacci no podía dormir—
Contó conejos en lugar de ovejas.

Goethe (1743-1832), el poeta y dramaturgo alemán, fue uno de los mayores maestros de la historia de la literatura. Su genio sin límites se resume en *Fausto*, una descripción simbólica de la búsqueda humana del conocimiento y el poder. Fausto, un médico alemán de gran cultura, vende su alma al diablo (personificado en Mefistófeles) a cambio del conocimiento, la juventud y poderes mágicos. Cuando Mefistófeles descubre que el pentagrama «Druidenfuss» (pie de mago celta) está dibujado en el umbral de Fausto, no puede salir. Los poderes mágicos atribuidos al pentagrama desde los pitagóricos (y que llevó a la definición de la Proporción Áurea) ganan significado simbólico con la cristiandad, ya que se considera que los cinco vértices representan las letras del nombre de Jesús. Por tanto, el pentagrama fue considerado una fuente de temor al demonio. El texto reza:

Mefistófeles: Deja que lo admita; un pequeño obstácul
Impide que salga de aquí;
Se trata del pie de druida sobre tu umbra

Fausto: ¿El pentagrama te molesta?
Pero dime, entonces, hijo del averno.
Si eso te lo impide, ¿cómo entraste?

Mefistófeles: ¡Observa! Las líneas están mal dibujadas;
Ésa, con el ángulo apuntando hacia fuera
Es, lo ves, una pequeña salida.

Mefistófeles, por tanto, usa un truco —el pentagrama tenía un pequeño orificio— para salir. La intención de Goethe en *Fausto* no era la de referirse al concepto matemático de la Proporción Áurea, e incluyó el pentagrama sólo por sus cualidades simbólicas. Goethe expresó en otro lugar su opinión respecto a las matemáticas: «Los matemáticos son como los franceses: cuando hablas con ellos, inmediatamente lo traducen a su propio idioma, y de golpe se transforma en algo totalmente diferente».

El físico y escritor estadounidense Oliver Wendell Holmes (1809-1894) publicó unas cuantas colecciones de poemas ingeniosos y encantadores. En *The Chambered Nautilus*, encuentra una moral en el crecimiento de la espiral logarítmica que caracteriza la concha de los moluscos:

Constrúyete las mansiones más majestuosas, oh mi alma,
¡Cómo ruedan las estaciones veloces!
¡Deja el pasado de bóveda baja!
Deja cada nuevo templo, más noble que el anterior,
Apártate del cielo con una cúpula más alta,
Hasta que al cabo tu arte libere,
Dejando tu concha perdida en el mar turbulento de la vida.

Existen muchos ejemplos de estructuras poéticas basadas en números. Por ejemplo, la *Divina Comedia*, el colosal clásico literario del poeta italiano Dante Alighieri (1265-1321), está dividida en tres partes, escrita en unidades de tres líneas y cada parte tiene treinta y tres cantos (excepto el primero, que tiene treinta y cuatro y que eleva el número total hasta cien).

La poesía es probablemente el lugar en que los números Fibonacci aparecieron por primera vez, incluso antes que los conejos Fibonacci. Una de las categorías

métricas en la poesía sánscrita y prakit se conoce con el nombre de mātrā-vṛttas. Se trata de metros en que el número de *morae* (sílabas cortas normales) permanece constante y el número de letras es arbitrario. En 1985, el matemático Parmanand Singh del Raj Narain College, India, señaló que los números Fibonacci y la relación que los define aparecieron en los escritos de tres autoridades indias sobre el mātrā-vṛttas antes del 1202 d.C., el año en que se publicó el libro de Fibonacci. El primero de estos autores era Ācārya Virahānka, quien vivió alrededor de los siglos VI y VIII. Aunque la regla que ofrece es algo vaga, menciona la mezcla de variaciones de dos metros anteriores para obtener el siguiente, del mismo modo en que cada número Fibonacci resulta de la suma de los dos precedentes. El segundo autor, Gopāla, ofrece la regla de forma específica en un manuscrito escrito entre el 1133 y el 1135. En él explica que cada metro es la suma de los dos metros precedentes y calcula la serie de metros 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…, exactamente la secuencia de Fibonacci. Finalmente, el gran escritor *jain* Ācārya Hemacandra, que vivió en el siglo XII y disfrutó el patronazgo de dos reyes, también afirmó claramente en un manuscrito compuesto alrededor del año 1150 que «la suma del último y del penúltimo número (de variaciones) es el del mātrā-vṛttas que le sigue». De todos modos, estas apariciones poéticas tempranas de números Fibonacci pasaron inadvertidas para los matemáticos.

En su libro pedagógico *Fascinating Fibonaccis*, el escritor Trudi Hammel Garland ofrece un ejemplo de un poema de cinco versos en el que el número de líneas (5), el número de compases en cada línea (2 o 3) y el número total de compases (13) son todos ellos números Fibonacci.

A fly and a flea in a flue (3 compases)

Were imprisoned, so what could they do? (3 compases)

Said the fly, «Let us flee!» (2 compases)

«Let us fly!» said the flea, (2 compases)

So they fled through a flaw in the flue. (3 compases)

No deberíamos tomar la aparición de los números Fibonacci como una evidencia de que el poeta necesariamente tenía en mente dichos números o la Proporción Áurea cuando construía la estructura del poema. Como ocurre con la música, la poesía, y especialmente en el pasado, estaba pensada para ser escuchada, no sólo leída. Por tanto, la proporción y la armonía que regalan el oído son un elemento estructural importante. Esto no significa que la Proporción Áurea o los números Fibonacci sean las únicas opciones del arsenal del poeta.

George Eckel Duckworth, profesor de clásicas de la Universidad de Princeton, realizó la afirmación más sonora sobre la aparición de la Proporción Áurea en la poesía. En su libro de 1962 *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid*, Duckworth asegura que «Virgilio compuso la *Eneida* siguiendo proporciones matemáticas; cada libro revela, en pequeñas unidades y en divisiones principales, la famosa proporción numérica conocida como Sección Áurea, Proporción Divina o proporción Media Áurea».

El poeta romano Virgilio (70 a.C.-19 a.C.) creció en una granja, y muchos de sus tempranos poemas pastorales tratan sobre el encanto de la vida rural. La *Eneida*, su épica nacional, que describe las aventuras del héroe troyano Eneas, se considera una de las mayores obras poéticas de la historia. A través de doce libros, Virgilio sigue a Eneas desde su huida de Troya a Cartago, su historia de amor con

Dido, hasta el establecimiento del Estado romano. Virgilio convierte a Eneas en el modelo de la piedad, la devoción a la familia y la lealtad al Estado.

Duckworth llevó a cabo cálculos precisos de las longitudes de los pasajes de la *Eneida* y analizó con ordenador las proporciones de estas longitudes. En especial, midió el número de líneas en pasajes caracterizados como mayores (representando ese número con una *M*) y menores (*m*), y calculó las proporciones de esos números. La identificación de partes mayores y menores se basaba en el contenido. Por ejemplo, en muchos pasajes, la parte mayor o menor es un discurso y en otra parte (menor o mayor respectivamente) es una narración o una descripción. A partir de este análisis, Duckworth llegó a la conclusión de que la *Eneida* contiene «cientos de proporciones Medias Áureas». También señaló que en un análisis anterior (de 1949) de otra obra de Virgilio (*Geórgicas I*) el valor de la proporción de las dos partes (número de líneas), conocidas como «Trabajos» y «Días», era muy cercano a Φ.

Por desgracia, Roger Herz-Fischler ha demostrado que probablemente el análisis de Duckworth se basa en malentendidos matemáticos. Dado que este descuido es habitual en muchos «descubrimientos» de la Proporción Áurea, lo explicaré brevemente a continuación.

Suponga que dispone de dos valores positivos cualesquiera de *m* y *M*, de modo tal que *M* sea mayor que *m*. Por ejemplo, *M* = 317 podría ser el número de páginas del último libro que ha leído, y *m* = 160 su peso en libras. Podríamos representar estos dos números en una línea (con longitudes proporcionales), como en la figura 91. La proporción de la parte más corta a la más larga es igual a *m/M* = 160/317 = 0, 504, mientras que la proporción de la

parte más larga respecto a la totalidad es $M/(M + m)$ = 317/477 = 0, 665. Se dará cuenta de que el valor $M/(M + m)$ se acerca mucho más a $1/\Phi$ = 0, 618 que m/M. Podemos demostrar matemáticamente que esto siempre se repite. (Inténtelo con el último libro que haya leído). A partir de la definición de la Proporción Áurea, sabemos que cuando una línea está dividida en Proporción Áurea, exactamente es $m/M = M/(M + m)$. Por tanto, podemos tener la tentación de pensar que si examinamos una serie de proporciones de números, como las longitudes de los pasajes, para descubrir la presencia de la Proporción Áurea, no importará si nos quedamos con la proporción del más corto respecto al más largo o del más largo respecto a la totalidad. Lo que acabo de demostrar es que sí que importa. Un entusiasta de la Proporción Áurea que desea demostrar una relación en Proporción Áurea entre el peso de los lectores y el número de páginas del libro que leen podría conseguirlo siempre y cuando presentara los datos del modo $M/(M + m)$, que se aproxima a $1/\Phi$. Esto es precisamente lo que le ocurrió a Duckworth. Al tomar la desafortunada decisión de usar sólo la proporción $M/(M + m)$ en su análisis, porque creía que así sería «un poco más preciso», comprimió y distorsionó los datos y convirtió el análisis en estadísticamente no válido. De hecho, Leonard A. Curchin, de la Universidad de Ottawa, y Roger Herz-Fischler repitieron en 1981 el análisis de Duckworth (pero usando la proporción m/M) y demostraron que no existen evidencias de la utilización de la Proporción Áurea en la *Eneida*. Ambos llegaron a la conclusión que «Virgilio se basó en la dispersión al azar». Además, Duckworth «dotó» a Virgilio del conocimiento de que la proporción de dos números Fibonacci consecutivos es una buena aproximación a la Proporción Áurea. Curchin y Herz-Fischler, por otro lado, demostraron de forma

convincente que incluso Herón de Alejandría, posterior a Virgilio y uno de los matemáticos más distinguidos de su tiempo, no sabía nada de dicha relación entre la Proporción Áurea y los números Fibonacci.



FIGURA 91

Lamentablemente, la afirmación que relaciona a Virgilio y a Φ continúa apareciendo en la literatura sobre la Proporción Áurea, demostrando nuevamente el poder de la Numerología Áurea.

Todos los intentos por desmontar la Proporción Áurea (real o falsa) en diversas obras de arte, piezas musicales o poesía dependen del convencimiento de que existe un canon de la belleza ideal y que puede ser llevado a la práctica. La historia ha demostrado, sin embargo, que los artistas que han producido obras de valor imperecedero son precisamente aquellos que se han apartado de estos preceptos académicos. A pesar de la importancia de la Proporción Áurea para muchas áreas de las matemáticas, las ciencias y los fenómenos naturales, deberíamos, en mi modesta opinión, abandonar su aplicación como un modelo fijo de la estética, tanto en la forma humana como en los modelos de las bellas artes.

8
DE LAS BALDOSAS A LOS CIELOS

La ciencia trata de entender, y la ciencia es mucho más que un simple cómputo mecánico.

ROGER PENROSE (1931-)

La entramada historia de la Proporción Áurea nos ha llevado desde el siglo VI a.C. hasta nuestros días. Dos tendencias entrelazadas unen estos veintiséis siglos de historia. Por un lado, el lema pitagórico «todo es número» se ha materializado de un modo espectacular en el papel que juega la Proporción Áurea en los fenómenos naturales que van desde la filotaxis hasta la forma de las galaxias. Por otro lado, la obsesión pitagórica por el significado simbólico del pentágono se ha metarmorfoseado en lo que, en mi opinión, se trata de una falsa idea: la que proclama que la Proporción Áurea proporciona una canon universal de belleza ideal. Después de todo esto, deben estar preguntándose si todavía queda algún campo inexplorado de esta aparentemente sencilla división de una línea.

EL CAMINO EMBALDOSADO HACIA LOS CUASI-CRISTALES

El pintor holandés Johannes Vermeer (1632-1675) es conocido por sus fantásticamente atrayentes pinturas de género, que por lo general retratan dos figuras enfrascadas en algún tipo de tarea doméstica.



FIGURA 92



FIGURA 93

En muchas de estas pinturas una ventana a la izquierda del espectador ilumina suavemente la habitación, y el modo en que la luz se refleja en el suelo embaldosado es pura magia. Si se examinan con detenimiento algunas de estas pinturas, se puede apreciar que una buena parte de ellas

poseen modelos idénticos de embaldosado, compuestos por cuadrados en blanco y negro: *El concierto*, *Dama escribiendo una carta con su doncella*, *Carta de amor* (figura 92; Rijksmuseum, Amsterdam), y *El arte de la pintura* (figura 93; Kunsthistorisches Museum, Viena).

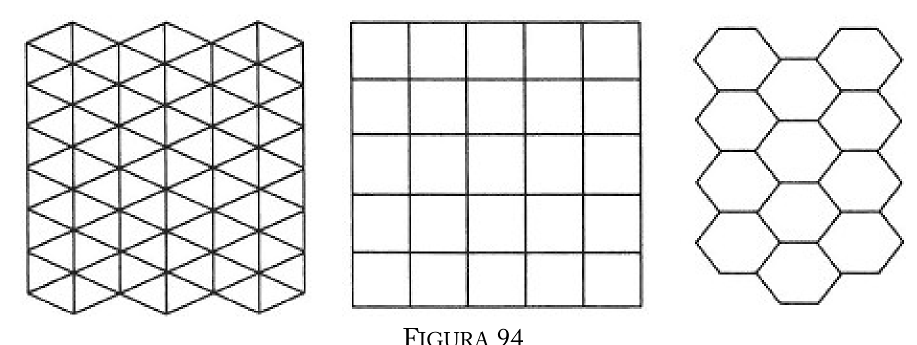


FIGURA 94

Resulta relativamente fácil embaldosar con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos, si es que se pretende cubrir toda una superficie y conseguir formar un modelo que se repita a intervalos regulares (conocido como mosaico periódico; figura 94). Las baldosas cuadradas sencillas, sin decoración y los modelos que configuran poseen una simetría multiplicada por cuatro: al girarlas un cuarto de círculo (90 grados) permanecen igual. Del mismo modo, las baldosas triangulares equiláteras tienen una simetría multiplicada por tres (al girarlas un tercio de círculo o 120 grados permanecen igual) y las baldosas hexagonales tienen una simetría multiplicada por seis (al girarlas 60 grados permanecen igual).

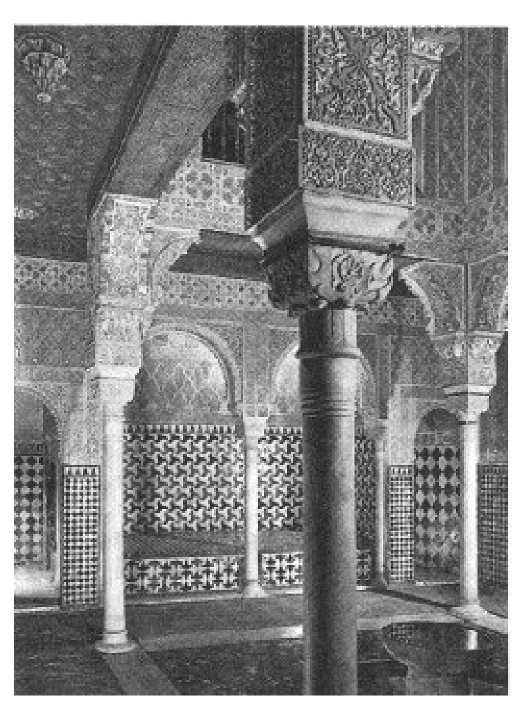


FIGURA 95

El mosaico periódico puede originarse a partir de formas más complicadas. Uno de los más formidables monumentos de la arquitectura islámica, la ciudadela-palacio Alhambra de Granada contiene numerosos ejemplos de un intrincado mosaico (figura 95). Algunos de estos modelos inspiraron al famoso artista gráfico holandés M. C. Escher (1898-1972), creador de ejemplos muy imaginativos de mosaicos (figura 96) a los que se refirió como «divisiones del plano».

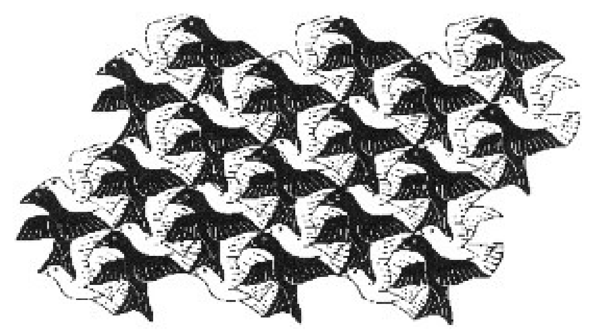


FIGURA 96

La figura geométrica plana más directamente relacionada con la Proporción Áurea es, naturalmente, el pentágono regular, con una simetría multiplicada por cinco. Sin embargo, los pentágonos no pueden utilizarse para rellenar el plano por entero y formar un modelo periódico de mosaico. No importa las veces que se intente, siempre quedarán huecos que llenar.

Por tanto, durante mucho tiempo se ha creído que ningún modelo de mosaico de un orden extenso puede mostrar una simetría multiplicada por cinco. Sin embargo, en 1974, Roger Penrose descubrió dos grupos de mosaicos básicos que podían encajar para rellenar un plano entero y mostrar la «prohibida» simetría multiplicada por cinco giratoria. Los modelos obtenidos no son estrictamente periódicos, aunque muestren un orden extenso.

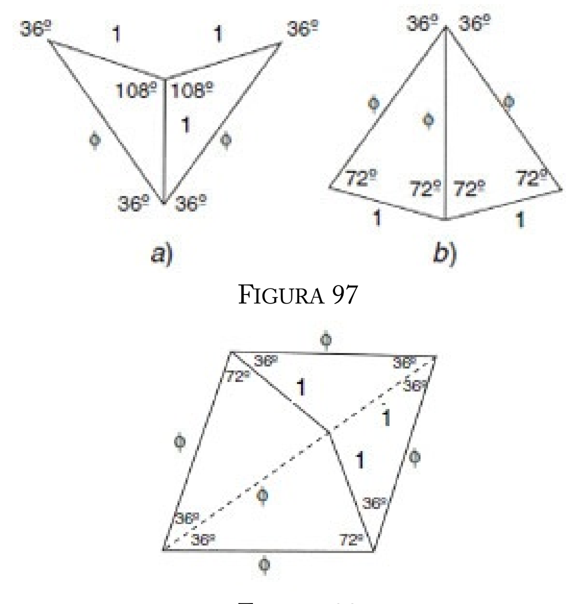


FIGURA 97

FIGURA 98

Los mosaicos Penrose muestran la Proporción Áurea en toda su extensión. Un par de mosaicos que Penrose consideró, consisten en dos formas conocidas como «dardo» y «cometa» (figura 97 *a* y *b* respectivamente). Nótese que las dos formas se componen de triángulos isósceles que aparecen en el pentágono (figura 25). El triángulo en el que la proporción del lado a la base es Φ (figura 97*b*) es el que se conoce como Triángulo Áureo y el que la proporción del lado a la base es 1/Φ (figura 97*a*) es el conocido como Nomón Áureo. Estas dos formas se pueden obtener al seccionar una forma de diamante o rombo con ángulos de 72 y 108 grados de tal modo que divida la diagonal larga en Proporción Áurea (figura 98).

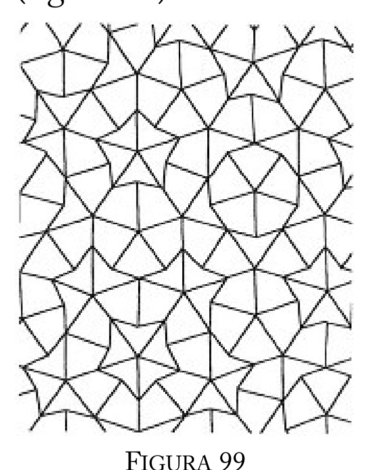


FIGURA 99

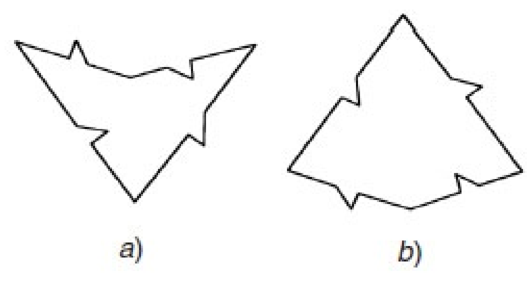


FIGURA 100

Penrose y el matemático de Princeton, John Horton Conway, mostraron que para poder cubrir todo el plano con dardos y cometas de un modo no-periódico (como en la figura 99) deben obedecerse ciertas reglas de encaje. Se puede conseguir añadiendo «claves» con forma de muescas y protuberancias a los lados de las figuras, como en las piezas de un *puzzle* (figura 100). Penrose y Conway demostraron además que los dardos y las cometas podían rellenar el plano de un modo infinito de modos no-periódicos, rodeando cada modelo que pudiera distinguirse con otro modelo. Una de las propiedades más sorprendentes del diseño de mosaico cometadardo de Penrose es que el número de cometas es de unas 1,618 veces el número de dardos. Es decir, si llamamos $N_{cometas}$ al número de cometas y N_{dardos} al número de dardos, entonces $N_{cometas}/N_{dardos}$ se acerca a Φ cuanto mayor sea el área.

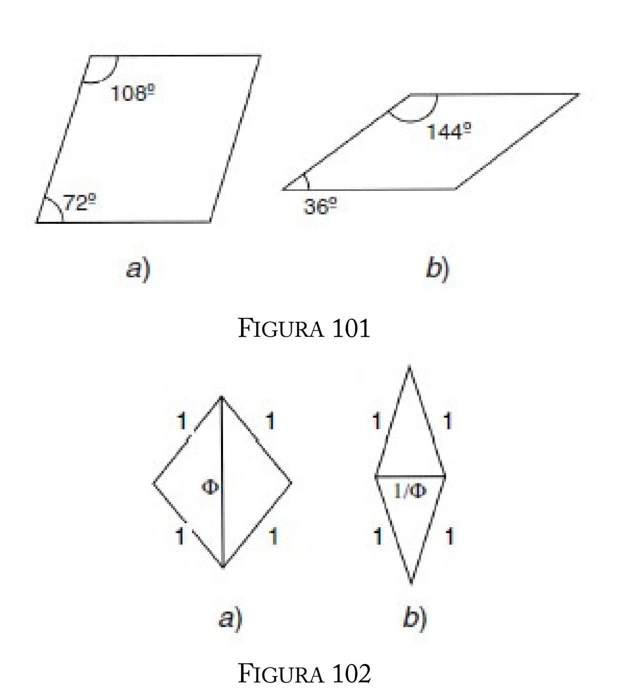


FIGURA 101

FIGURA 102

Otro par de mosaicos Penrose que pueden cubrir un plano entero (no periódicamente) se compone de dos diamantes (rombos), uno grueso (obtuso) y otro fino (agudo; figura 101). Como sucede en el par cometa-dardo, cada uno de los rombos se compone de dos Triángulos Áureos o dos Nomones Áureos (figura 102), y deben obedecerse unas reglas de encaje especiales (en este caso descritas al decorar los lados o ángulos apropiados de los rombos; figura 103) para poder obtener un modelo de relleno del plano (como en la figura 104). De nuevo en las áreas mayores hay 1, 618 veces más rombos gruesos que finos, $N_{gruesos}/N_{finos} = \Phi$.

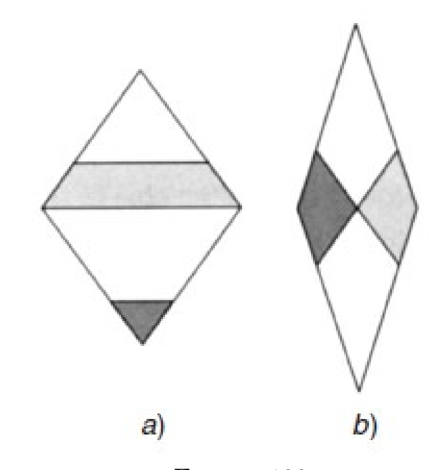


FIGURA 103

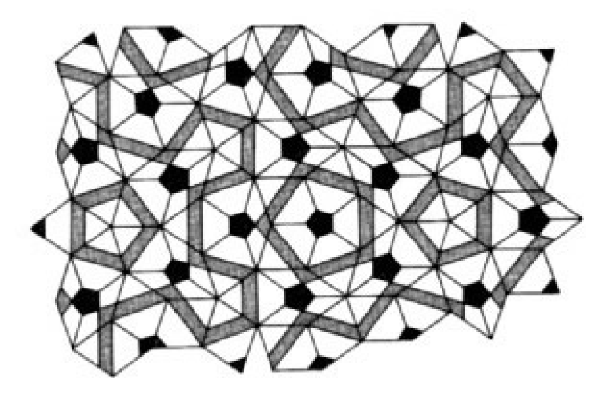


FIGURA 104

Los rombos gruesos y finos están íntimamente relacionados con los dardos y las cometas, y ambos, a través de la Proporción Áurea, al sistema pentágono-pentagrama. Recuérdese que el interés pitagórico por la Proporción Áurea empezó con la serie infinita de pentágonos y pentagramas anidados en la figura 105. Los cuatro mosaicos Penrose se ocultan en esta figura. Los puntos *B* y *D* señalan los vértices más opuestos de la cometa *DCBA*, mientras que los puntos *A* y *C* señalan las «alas» del dardo *EABC*. Del mismo modo se puede encontrar el rombo grueso *AECD* y el fino (sin escala) *ABCF*.

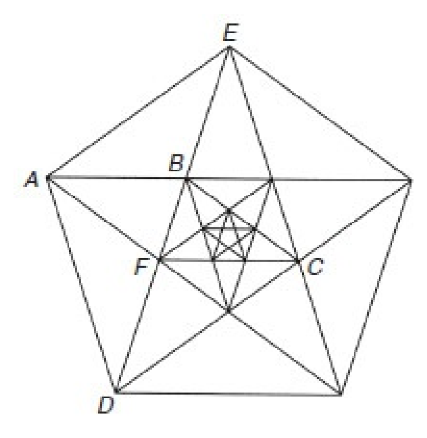


FIGURA 105

La obra de Penrose sobre el mosaico se extendió a las tres dimensiones. Del mismo modo que los mosaicos de dos dimensiones pueden utilizarse para rellenar un plano, los «bloques» de tres dimensiones pueden utilizarse para rellenar el espacio. En 1976 el matemático Robert Ammann descubrió un par de «cubos» (figura 106), uno «aplastado» y el otro «estirado», conocidos como romboedro, capaces de rellenar espacios por completo. Ammann fue capaz de demostrar que, dado un conjunto de reglas de encaje de caras, el modelo que se obtiene no es periódico y posee las propiedades simétricas del icosaedro (figura 20*e*; ésta es el

equivalente en tres dimensiones a la simetría multiplicada por cinco, ya que cinco bordes simétricos se encuentran en cada vértice). No resulta sorprendente que los dos romboedros sean Romboedros Áureos; sus caras son idénticas a las de los rombos de los mosaicos de Penrose (figura 101).

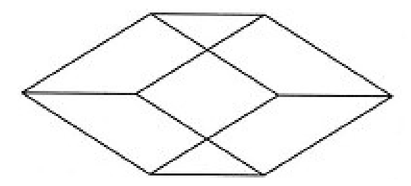
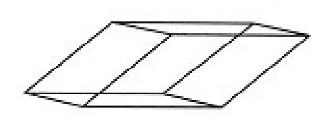



FIGURA 106

Los mosaicos de Penrose habrían permanecido relativamente ocultos entre los descubrimientos de las matemáticas recreativas de no haber sido por un importante hallazgo acontecido en 1984. El ingeniero de materiales israelí, Dany Schectman, y sus colaboradores descubrieron que los cristales de una aleación de manganeso de aluminio mostraba un orden extenso y una simetría multiplicada por cinco. Para los cristalógrafos resultó tan impactante como lo sería para los zoólogos el descubrimiento de un rebaño de vacas de cinco patas. Durante décadas, los físicos especialistas en el estado sólido y los cristalógrafos estaban convencidos de que los sólidos sólo se manifestaban en dos formas básicas: o siguen un orden muy concreto y están compuestos en su totalidad de cristales periódicos, o son totalmente amorfos. En el caso de los cristales ordenados, como los de la sal común, los átomos o grupos de átomos aparecen siempre siguiendo los mismos motivos recurrentes, llamados *unidad de celdas*, que forman estructuras periódicas. Por ejemplo, en el caso de la sal, la *celda unidad* es un cubo en el que cada átomo de cloro está rodeado de sus vecinos de sodio y viceversa (figura 107). Del mismo modo sucede que en un suelo perfectamente embaldosado, la posición y

orientación de cada celda unidad determina de un modo único el modelo entero. Por otro lado, en los materiales amorfos, como en los cristales, los átomos están totalmente desorganizados. Del mismo modo que sólo las formas como los cuadrados (con una simetría multiplicada por cuatro), los triángulos (simetría multiplicada por tres), y los hexágonos (simetría multiplicada por seis), pueden llenar un plano entero con un mosaico periódico, se creía que sólo existían los cristales con una simetría multiplicada por dos, tres, cuatro y seis. Los cristales de Schectman causaron conmoción porque aparecieron de un modo muy ordenado (como los cristales periódicos) y mostraban una simetría multiplicada por cinco (o icosaedro). Antes de este hallazgo, poca gente sospechaba que pudiera existir otro estado de la materia que compartiera aspectos importantes tanto con las substancias cristalinas como con las amorfas.

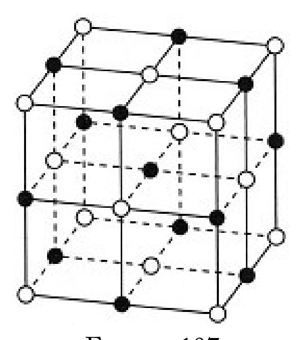
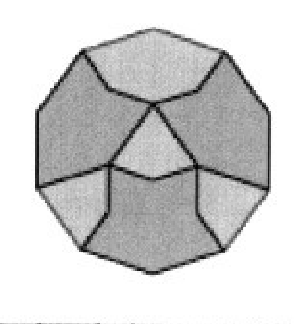


FIGURA 107

Estos nuevos tipos de cristales (ya que desde su descubrimiento se han encontrado otras aleaciones de aluminio) se conocen con el nombre de *cuasi-cristales*, ya que no son ni amorfos como el cristal, ni periódicos como la sal. Dicho de otro modo, ¡estos materiales tan poco corrientes tienen las mismas propiedades que los mosaicos Penrose! Pero dicha afirmación posee poco valor para los físicos, ya que lo que quieren entender es el porqué y el cómo se

forman estos cuasi-cristales. En este caso, las leyes de encaje de Penrose y Ammann no son más que un ejercicio matemático inteligente que no explica el comportamiento de los átomos reales o de los grupos de átomos. En concreto, resulta difícil imaginar la energía que permite la existencia de dos tipos de grupos (como los dos romboedros de Ammann) en su proporción necesaria en términos de densidad.

En 1991 el matemático Sergei E. Burkov del Instituto Landau de Física Teórica de Moscú dio con una pista que podría explicarlo, al descubrir que no eran necesarias dos formas de mosaicos para conseguir el mosaico de un plano. Burkov demostró que la cuasi-peridiocidad podía generarse utilizando una única unidad decagonal (de diez lados), siempre que los mosaicos pudieran traslaparse unos con otros, una propiedad totalmente prohibida en los intentos anteriores. Cinco años después, la matemática alemana Petra Gummelt, de la Universidad Ernst Moritz Arndt en Greifswald, demostró con rigurosidad que el mosaico Penrose podía obtenerse utilizando un simple decágono «decorado» combinado con una regla de superposición específica. Pueden traslaparse dos decágonos siempre y cuando las zonas ensombrecidas del decágono se superpongan (figura 108). El decágono también está íntimamente relacionado con la Proporción Áurea: el radio del círculo que circunscribe un decágono con una longitud del lado de 1 unidad es igual a Φ.



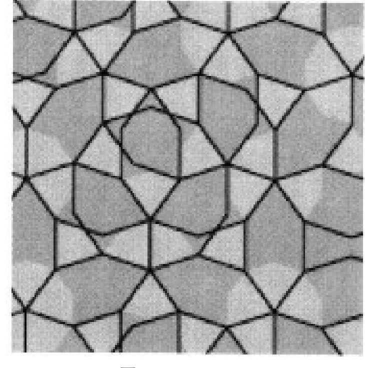


FIGURA 108

Basándose en la obra de Gummelt, las matemáticas podían por fin convertirse en física. Los físicos Paul Steindhart de la Universidad de Princeton y Hyeong-Chai Jeong de la Universidad Sejong en Seul, demostraron que las reglas puramente matemáticas de las unidades traslapadas podía transformarse en una pintura física en la que las «unidades de cuasi-celda», que en realidad son grupos de átomos, simplemente comparten átomos. Steindhart y Jeong sugirieron que los cuasi-cristales son estructuras en las que grupos idénticos de átomos (unidades de cuasi-celda) comparten átomos con sus vecinos, en un modelo diseñado para maximizar la densidad del grupo. En otras palabras, la agrupación cuasi-periódica origina un sistema más estable (mayor densidad, menor energía) que de otro modo. Steindhart, Jeong y otros colaboradores también intentaron verificar este modelo de un modo experimental en 1998. Bombardearon con rayos-X y haces de electrones una

aleación de aluminio, níquel y cobalto de cuasicristal. Las imágenes que se obtuvieron de la estructura a partir de los rayos dispersados, concordaban notablemente con la pintura de los decágonos superpuestos. Podrán observarlo en la figura 109, donde un modelo de mosaico en forma de decágono se superpone al resultado experimental. Más recientemente se han obtenido unos resultados más ambiguos en los experimentos. Sin embargo, la impresión general sigue siendo que los cuasi-cristales pueden explicarse por el modelo Steindhart-Jeong.

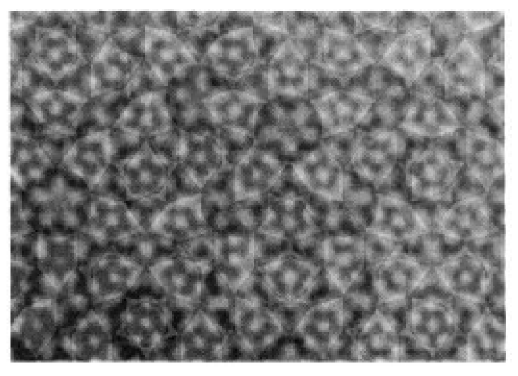


FIGURA 109

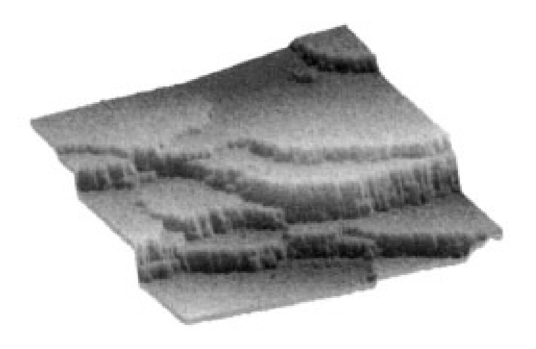


FIGURA 110

Las imágenes de las superficies de los cuasi-cristales (tomadas en 1994 y en 2001) revelan otra fascinante relación con la Proporción Áurea. Utilizando una técnica conocida como microscopio de escaneo en túnel (STM[1]), científicos

de la Universidad de Basilea, Suiza, y de los Laboratorios Ames en la Universidad del Estado de Iowa, consiguieron obtener unas imágenes de alta resolución de las superficies de una aleación de aluminio-cobre-hierro, y de una aleación de aluminio-paladio-manganeso, ambos cuasi-cristales. Las imágenes nos muestran «terrazas» llanas (figura 110) que terminan en peldaños de dos alturas primarias, «alta»y «baja» (ambas tan sólo de unas pocas centésimas de millonésima de pulgada). ¡La proporción de estas alturas era igual a la Proporción Áurea!

Los cuasi-cristales resultan un magnífico ejemplo de un concepto que comenzó como una entidad puramente matemática (basada en la Proporción Áurea), pero que a la larga explicó un fenómeno natural real. Lo que es aún más sorprendente es que este descubrimiento en particular surgiera como resultado de las matemáticas *recreativas*. ¿Cómo lograron los matemáticos «anticiparse» a los posteriores descubrimientos de los físicos? Es aún más interesante si recordamos que tanto Durero como Kepler ya mostraron su interés por los mosaicos de formas con simetría por cinco en los siglos XVI y XVII. ¿Es posible que hasta los temas más esotéricos en matemáticas tengan aplicaciones en los fenómenos naturales, o bien inspirados por el ser humano? Retomaremos esta cuestión más adelante en el capítulo 9.

Otro aspecto fascinante de la historia de los cuasi-cristales tiene que ver con sus dos principales teóricos. Tanto Penrose como Steinhardt emplearon la mayor parte de sus carreras científicas en el estudio de los temas relacionados con la cosmología, es decir, el estudio del universo como tal. Penrose fue el que descubrió que la teoría de Einstein de la relatividad general predice sus propios defectos, puntos en

los que la fuerza de la gravedad se hace infinita. Estas particularidades matemáticas corresponden a lo que llamamos *agujeros negros*, masas que se han colapsado en unas densidades tales que su gravedad es lo suficientemente fuerte como para evitar que cualquier tipo de luz, masa o energía se escape. Las observaciones realizadas durante el último cuarto de siglo revelan que los agujeros negros no son simples conceptos teóricos imaginarios sino objetos reales que existen en el universo. Observaciones recientes con dos grandes observatorios espaciales, el Telescopio Espacial Hubble y el Observatorio Chandra de Rayos X, han determinado que los agujeros negros no son ni tan siquiera poco habituales. Al contrario, los centros de la mayoría de las galaxias albergan monstruosos agujeros negros con masas de entre unos millones a unos miles de millones de veces la masa de nuestro Sol. La presencia de agujeros negros se revela por la atracción gravitacional que ejercen sobre las estrellas y el gas en las cercanías a ellos. Según el modelo estándar de «big bang» que describe el origen de nuestro universo entero, el cosmos como tal, empezó su expansión a partir de esta singularidad: un estado extremadamente denso y caliente.

Paul Steinhardt fue una de las figuras clave en el desarrollo de lo que hoy se conoce como modelo inflacionario del universo. Según este modelo, propuesto en un principio por el físico Alan Guth del MIT, cuando el universo tenía tan sólo una pequeña fracción de segundo de edad (0, 000…1; con «1» en el puesto decimal 35º), sufrió una expansión increíblemente rápida, aumentando de tamaño por un factor de más de 10^{30} (1 seguido de 30 ceros) en una fracción de segundo. Dicho modelo explica algunas otras propiedades desconcertantes de nuestro universo, como el hecho de que tenga el mismo aspecto desde todas

las direcciones (siendo exquisitamente isotrópico). En 2001 Steinhardt y sus colaboradores propusieron una nueva versión para los inicios del universo, conocido como Universo Ekpirótico (de la palabra que en griego significa «conflagración» o una repentina explosión de fuego). En este modelo, todavía especulativo, el *big bang* ocurrió cuando chocaron dos universos tridimensionales que se movían a lo largo de una dimensión extra que se encontraba oculta.

La pregunta que nos intriga es: ¿Por qué dos cosmólogos tan extraordinarios decidieron embarcarse en el mundo de las matemáticas recreativas y los cuasi-cristales?

Conozco a Steinhardt y a Penrose desde hace muchos años, ya que, al igual que ellos, también me dedico a la astrofísica teórica y a la cosmología. De hecho, Penrose fue uno de los conferenciantes invitados en la primera gran conferencia que organicé sobre astrofísica relativista en 1984, y Steinhardt acudió como conferenciante invitado en la celebrada en 2001. Sin embargo, ignoraba qué les había motivado a curiosear en las matemáticas recreativas, estando bastante alejadas de su interés profesional en astrofísica. Así que se lo pregunté.

Roger Penrose contestó: «No estoy seguro de tener una buena respuesta. Como sabes las matemáticas es algo que la mayoría de los matemáticos hacen por diversión». Tras pensárselo un poco más añadió: «Desde niño solía jugar con piezas que encajaban; parte de mi trabajo sobre mosaicos parte de esa idea; de hecho, mi trabajo sobre mosaicos es anterior a mi trabajo sobre cosmología. Sin embargo, llegó un momento en el que mi trabajo sobre matemáticas recreativas estaba, al menos parcialmente, motivado por mi investigación cosmológica. Pensaba sobre la estructura a

gran escala del universo y buscaba maquetas de juguete con unas reglas básicas sencillas, que podían generar estructuras complicadas a gran escala».

«Pero», pregunté, «¿qué fue lo que te llevó a continuar trabajando sobre ese problema durante tanto tiempo?»

Penrose se rió y dijo, «como ya sabes, siempre me ha interesado la geometría; sencillamente ese problema me intrigaba. Es más, aunque tenía la intuición de que esas estructuras podían darse en la naturaleza, no podía entender cómo la naturaleza podía encajarlas en lo que es el proceso normal de aparición del cristal, que es local. Hasta cierto punto todavía me desconcierta».

La reacción inmediata de Paul Steinhardt al teléfono fue: «¡Buena pregunta!» Tras pensárselo unos minutos recordó que «cuando aún no me había licenciado no estaba seguro de lo que quería hacer. Entonces, en la escuela de postgrado, buscando relajar la mente del tremendo trabajo que me ocasionaba la física de partículas, encontré el tema del orden y la simetría en los sólidos. En cuanto me topé con el problema de los cristales cuasi-periódicos, lo encontré tan *irresistible* que me obligué a volver sobre la cuestión una y otra vez».

FRACTALES

El modelo Steinhardt-Jeong para los cuasi-cristales tiene la interesante propiedad de que produce un orden extenso a partir de las interacciones colindantes, sin acabar convirtiéndose en un cristal totalmente periódico. Curiosamente, podemos hallar esta propiedad general en la secuencia de Fibonacci. Consideren el siguiente algoritmo simple para la creación de una secuencia conocida como la

Secuencia Áurea. Empiecen con el número 1, y sustitúyanlo por el 10. En adelante sustituyan cada 1 por 10 y cada 0 por 1. Obtendrán los siguientes peldaños:

1

10

101

10110

10110101

1011010110110

101101011011010110101

Y así sucesivamente. Es obvio que empezamos con una ley «de corto alcance» (la sencilla transformación de 0 → 1 y de 1 → 10) y hemos obtenido un orden no-periódico extenso. Nótese que los números uno en la secuencia de líneas 1, 1, 2, 3, 5, 8… forman una secuencia de Fibonacci, y lo mismo sucede con los números cero (empezando por la segunda línea). Más aún, la proporción del número de unos al número de ceros se aproxima a la Proporción Áurea a medida que la secuencia se alarga. De hecho, un examen de la figura 27 nos revela que si consideramos que 0 es una pareja de conejos hijos y 1, una pareja de conejos adultos, la secuencia que acabamos de presentar refleja el número de parejas de conejos. Pero, aparte de estas propiedades sorprendentes, la Secuencia Áurea guarda todavía más sorpresas. Si se empieza por 1 (en la primera línea), seguido por 10 (en la segunda línea) y simplemente se añade a cada línea la anterior, podemos generar también la secuencia entera. Por ejemplo, la cuarta línea, 10110, se obtiene al enganchar la segunda línea, 10, a la tercera, 101, y así sucesivamente.

Recuerden que «auto-similitud» significa simetría a lo largo de la escala de tamaños. La espiral logarítmica muestra dicha similitud porque tiene la misma apariencia en cualquier tamaño, y lo mismo sucede con la serie de pentágonos y pentagramas anidados de la figura 10. Cada vez que entre en una peluquería verá una serie infinita de reflejos auto-similares de usted mismo entre dos espejos paralelos.

La Secuencia Áurea también es auto-similar a diferentes escalas. Consideren la secuencia

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1…

Pruébenlo con una lupa en el sentido que a continuación les explico. Empezando por la izquierda, siempre que encuentren un 1, marquen un grupo de tres símbolos, y cuando encuentren un 0, marquen un grupo de dos símbolos (sin que se solapen los grupos). Por ejemplo, el primer dígito es 1, por tanto marcamos el grupo de los primeros tres dígitos (ver abajo). El segundo dígito empezando por la izquierda es un cero, por tanto marcamos el grupo de los dos dígitos 10 a continuación del primer 101. El tercer dígito es 1; por tanto marcamos los tres dígitos 101 a continuación del 10; y así sucesivamente. Ahora la secuencia marcada es así:

101 10 101 101 10 101 …

Ahora, de cada grupo de tres símbolos señalen los dos primeros, y de cada grupo de dos, señalen el primero (los símbolos señalados están subrayados):

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1...

Si miran ahora a la secuencia señalada

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0…

se darán cuenta de que es idéntica a la Secuencia Áurea.

Podemos hacer otro ejercicio de ampliación de la Secuencia Áurea simplemente subrayando cualquier orden o subsecuencia. Por ejemplo, supongamos que elegimos «10» como nuestra subsecuencia, y que la subrayamos siempre que ocurra en la Secuencia Áurea:

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0...

Si consideramos que 10 es un símbolo de un dígito y marcamos el número de lugares por el que cada orden de 10 necesita moverse para coincidir con el siguiente 10, obtenemos la secuencia: 2122121… (el primer «10» necesita desplazarse dos lugares para coincidir con el segundo, el tercero es uno después del segundo, etc.). Si ahora sustituimos cada 2 por 1 y cada 1 por 0 en la nueva secuencia, recuperamos la Secuencia Áurea. Dicho de otro modo, si miramos cualquier orden dentro de la Secuencia Áurea, descubrimos que existe el mismo orden en la secuencia a una escala diferente. Los objetos que poseen esta propiedad, como las muñecas rusas *matriuska*, que encajan una dentro de la otra, se conocen como *fractales*. El famoso matemático estaudonidense polaco-francés Benoit B. Mandelbrot inventó el término «fractal» (del latín *fractus* que significa «roto, fragmentado»), que constituye no sólo un concepto central en la geometría de la naturaleza, sino también en la teoría de los sistemas extremadamente irregulares conocidos como *caos*.

La geometría fractal representa un extraordinario intento para describir las formas y los objetos del mundo real. Cuando miramos a nuestro alrededor, nos damos cuenta de que pueden describirse muy pocas formas, como por ejemplo las líneas rectas, los círculos, los cubos y las esferas, con las simples figuras de la geometría euclidiana. Cuenta una vieja broma matemática cómo un físico creía

que podía hacerse rico apostando a las carreras de caballos resolviendo las ecuaciones exactas del movimiento de los caballos. Tras mucho trabajo, consiguió resolver algunas ecuaciones… para los caballos esféricos. Por desgracia, los caballos no son esféricos, ni las nubes, las coliflores o los pulmones. Del mismo modo que los relámpagos, los ríos y los sistemas de drenaje no van en línea recta, recordándonos a las ramas de los árboles y al sistema circulatorio humano. Por ejemplo, examinen, las ramas fantásticamente intrincadas del Dolmen en la nieve (figura 111), obra del pintor romántico alemán Caspar David Friedrich (1774-1840; actualmente en la Gemäldegalerie Neue Meister en Dresden).

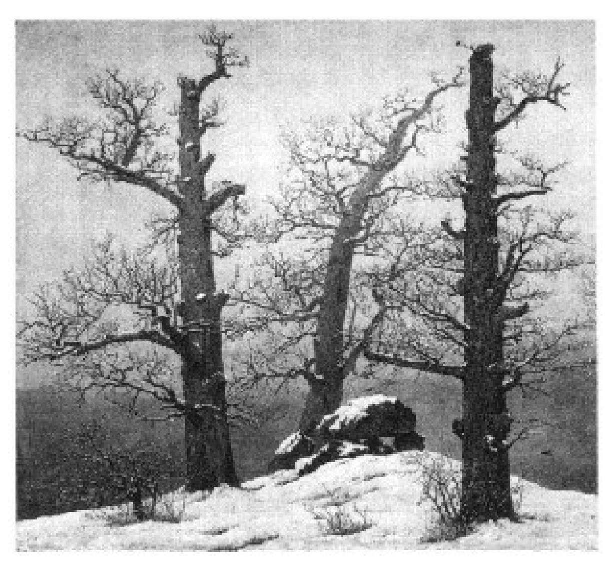


FIGURA 111

El gigantesco salto mental de Mandelbrot al formular la geometría fractal consiste, en primer lugar, en el hecho de que reconocía que todo este complejo zigzag no es simplemente una molestia, sino que a menudo constituye la principal característica matemática de la morfología. En primer lugar, Mandelbrot se dio cuenta de la importancia de

la *auto-similitud* (el hecho de que muchas formas naturales muestren secuencias infinitas de motivos repitiéndose dentro de motivos, a muchas escalas). El nautilo (figura 4) muestra claramente dicha propiedad, así como una coliflor regular (desgájela en trozos más pequeños y verá cómo llega un momento en el que siguen teniendo la misma apariencia que la misma verdura entera). Haga una foto a una pequeña roca, y verá cómo le costará reconocer que no está viendo una montaña. Incluso la forma escrita de una fracción continua equivalente a la Proporción Áurea posee dicha propiedad (figura 112) (amplíe con una lupa los símbolos que apenas se vislumbran y verá la misma fracción continua). En todos estos objetos, al hacer un *zoom* sobre ellos, no se disminuye el grado de irregularidad que muestran, más bien lo mantienen en todos sus tamaños.

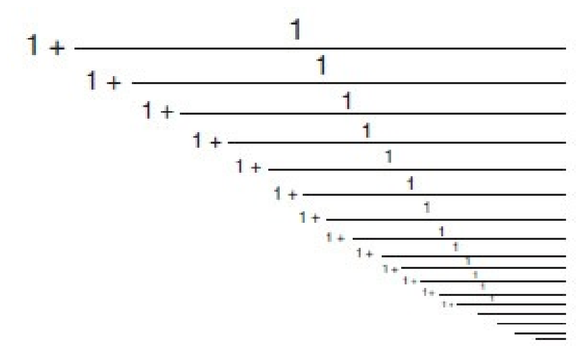


FIGURA 112

Llegado a este punto, Mandelbrot se preguntó, ¿cómo se determinan las dimensiones de algo que tiene semejante estructura fractal? En el mundo de la geometría euclidiana, todos los objetos tienen dimensiones que pueden expresarse como números enteros. Los puntos tienen cero dimensiones, las líneas rectas son unidimensionales, las figuras planas como los triángulos y los pentágonos son bidimensionales, y los objetos como las esferas y los sólidos platónicos son tridimensionales. Por otro lado, las curvas fractales, como el

trazado de un relámpago, serpentean de un modo tan violento, que podría decirse que están entre una y dos dimensiones. Si se trata de un trazado relativamente recto, podemos imaginarnos que la dimensión fractal será próxima a una, pero, si es muy compleja, entonces podemos esperar que se trate de una dimensión cercana a dos. Estas cuestiones se han convertido en una pregunta ya famosa: «¿qué longitud tiene la costa británica?» La sorprendente respuesta de Mandelbrot es que la longitud de la línea de costa depende de la longitud de tu regla. Supongamos que comenzamos con un mapa de Gran Bretaña generado por satélite de un pie de lado. Se mide la longitud y se multiplica por la escala de tu mapa para obtener la longitud real. Por supuesto, este método no tendrá en cuenta las curvas de la costa que sean demasiado pequeñas para aparecer en el mapa. Por tanto, iniciaremos el largo viaje de recorrido por la costa británica equipados con un bastón de una yarda para medir su longitud, yarda a yarda. Sin duda alguna, esta vez obtendremos un número mayor al anterior, ya que tendremos en cuenta todas las curvas de los más pequeños recodos que encontremos a nuestro paso. Sin embargo, se dará cuenta de immediato que todavía pasará por alto estructuras de tamaños inferiores a una yarda. La conclusión a la que llegamos es que cuanto menor sea la regla con que medimos, mayor longitud obtendremos, porque siempre descubrimos que existe una subestructura a una escala todavía menor. Esto sugiere que, siempre que tratemos con fractales, hasta el concepto de longitud que representa el tamaño necesita revisarse. Los contornos de la línea de la costa no se convierten en líneas rectas al ampliarlas; más bien las arrugas persisten en todas las escalas y la longitud se incrementa *ad infinitum* (o, por lo menos, hasta la escala atómica).

Esta situación se ejemplifica maravillosamente bien por lo que podía pensarse que es la línea de la costa de una tierra imaginaria. El copo de nieve de Koch es una curva descrita por primera vez en 1904 por el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924) (figura 113). Empecemos con un triángulo equilátero, de un lado de una pulgada. A continuación, a mitad de cada lado construiremos un triángulo menor, con un lado de un tercio de pulgada. Esto nos dará la Estrella de David en la segunda figura. Nótese que el contorno original del triángulo tenía tres pulgadas de largo, mientras que ahora está compuesto de doce segmentos, de un tercio de una pulgada cada uno, así que la longitud total ahora es de cuatro pulgadas. Repitan el mismo procedimiento consecutivamente, es decir, en cada lado del triángulo pongan uno nuevo, con una longitud de un lado que sea un tercio de la anterior. Cada vez la longitud del contorno aumenta por un factor de 4/3 hasta el infinito, a pesar de que rodea un área finita. (Podemos mostrar que el área converge hasta los ocho quintos del triángulo original.)

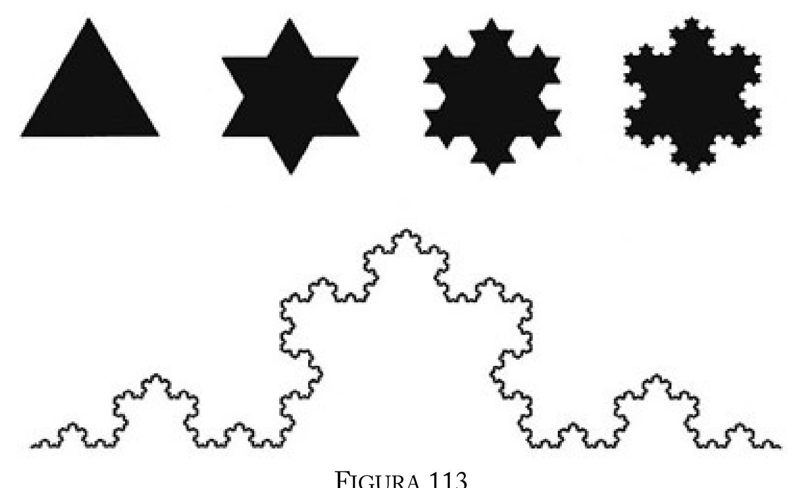


FIGURA 113

El descubrimiento de los fractales originó la cuestión sobre las dimensiones con las que debería relacionarse. La dimensión fractal es en realidad la medida de la arruga del fractal, o de a qué velocidad la longitud, la superficie, o el volumen se incrementan si lo medimos con respecto a escalas siempre decrecientes. Por ejemplo, intuimos que la curva de Koch (parte inferior de la figura 113) ocupa más espacio que la línea unidimensional pero menos espacio que el cuadrado bidimensional. ¿Cómo puede tener una dimensión intermedia? No existe ningún número entero entre el 1 y el 2. Aquí es donde Mandelbrot tuvo en cuenta un concepto introducido por primera vez en 1919 por el matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942). Se trata de un concepto, dimensiones fraccionarias, que a primera vista parece inconcebible. A pesar del primer *shock* que nos pueda producir dicha idea, las dimensiones fraccionarias eran precisamente lo que se necesitaba para definir el grado de irregularidad, la complejidad fractal, de los objetos.

Para conseguir una definición con sentido de la dimensión de auto-similitud o dimensión fractal, resulta útil utilizar como guía las dimensiones de números enteros 0, 1, 2, 3. La idea consiste en examinar cuántos objetos pequeños constituyen un objeto mayor en un número cualquiera de dimensiones. Por ejemplo, si bisectamos una línea (unidimensional) obtendremos dos segmentos (por un factor de reducción de $f=1/2$). Cuando dividimos un cuadrado (bidimensional) en subcuadrados de la mitad de longitud del lado (de nuevo un factor de reducción de $f=1/2$), obtendremos $4 = 2^2$ cuadrados. Por un tercio de longitud del lado ($f=1/3$), habrá $9 = 3^2$ subcuadrados (figura 114). Para un cubo (tridimensional), una división en cubos de la mitad de la longitud de la arista ($f=1/2$) produce $8 = 2^3$ cubos, y un tercio de la longitud ($f=1/3$) produce $27 = 3^3$ cubos (figura

114). Si examinamos todos estos ejemplos, vemos que existe una relación entre el número de subobjetos, *n*, la longitud del factor de reducción, *f*, y la dimensión, *D*. La relación es simplemente *n* = (*1/f*)*D*. (Propongo otro modelo de dicha relación en el apéndice 7). Si aplicamos la misma relación al copo de nieve de Koch obtendremos una dimensión fractal de 1, 2619. Resulta que la línea de costa británica también tiene una dimensión fraccionaria de 1, 26. Por lo tanto, los fractales sirven como modelos de las líneas de costa reales. De hecho, el pionero de la teoría del caos, Mitch Feigenbaum, de la Universidad Rockefeller de Nueva York, explotó esto para crear en 1992 el revolucionario *Hammond Atlas of the World*. Utilizando ordenadores para hacer cuanto fuera posible sin ayuda, Feigenbaum examinó los datos fractales por satélite para determinar qué puntos de la línea de costa tenían una mayor significación. El resultado fue un mapa de Sudamérica, con una mayor exactitud de un 98 por ciento, si se la compara con el convencional 95 por ciento de los anteriores atlas.

	Línea	Cuadrado	Cubo
División por 2			
Número de subobjetos	2	4	8
	2^1	2^2	2^3
División por 3			
Número de subobjetos	3	9	27
	3^1	3^2	3^3

FIGURA 114

Para muchos fractales en la naturaleza, la principal característica es la ramificación desde los árboles hasta la aparición de cristales. Examinemos un modelo muy simplificado para este fenómeno omnipresente. Empecemos con un segmento de unidad de longitud, que se divide en dos ramas de longitud $^1/_2$ en 120 grados (figura 115). Cada rama se divide a su vez de un modo similar, y el proceso continúa sin límites.

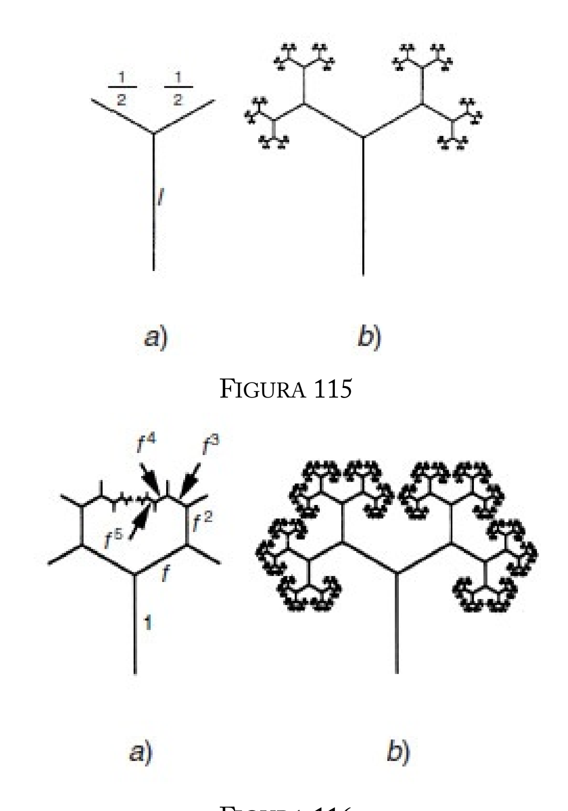


FIGURA 115

FIGURA 116

Si en lugar de un factor de reducción de $^1/_2$ hubiéramos escogido un número algo mayor (p. ej., 0, 6), el espacio entre las diferentes ramas se habría reducido, a la larga solapándose las ramas. Evidentemente, para muchos sistemas (por ejemplo, un sistema de drenaje o el sistema circulatorio de la sangre), nos interesa descubrir cuál es el

factor de reducción para que las ramificaciones se toquen y empiecen a solaparse, como en la figura 116. Sorprendentemente (o quizás a estas alturas ya no), ello sucede por un factor de reducción que es igual precisamente a *uno partido por la Proporción Áurea, 1/*Φ = 0,618… (Verán una breve demostración en el apéndice 8). Esto se conoce como *Árbol Áureo*, y su dimensión fractal resulta ser de 1,4404. El Árbol Áureo y los fractales similares compuestos de líneas simples no pueden resolverse fácilmente a simple vista tras varias repeticiones. El problema puede resolverse utilizando figuras bidimensionales como las *lunas* (figura 117) en lugar de líneas. En cada uno de los pasos, puede utilizar una fotocopiadora equipada con reducción de imagen para producir las lunas reducidas por un factor de 1/Φ. La imagen que se obtiene, un Árbol Áureo compuesto de lunas, se muestra en la figura 118.

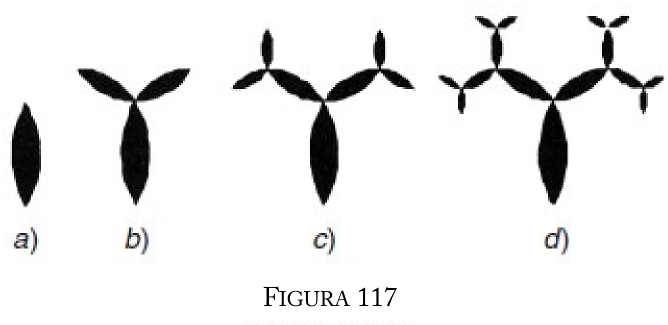


FIGURA 117

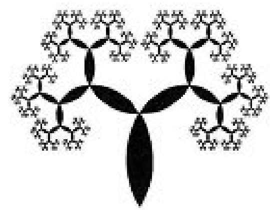


FIGURA 118

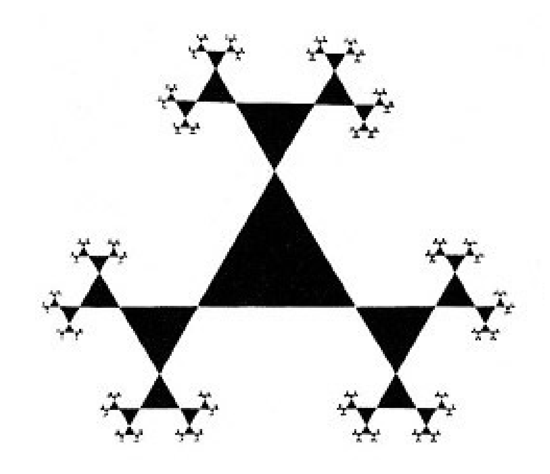


FIGURA 119

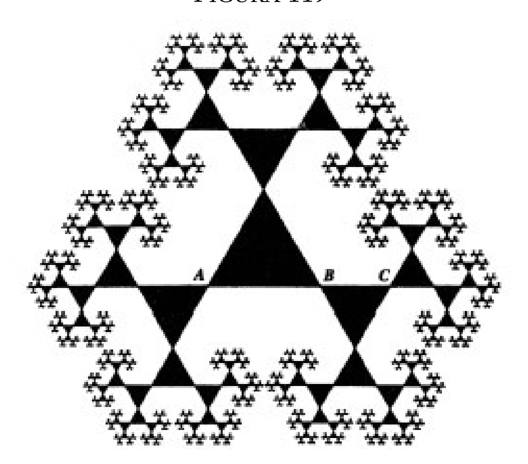


FIGURA 120

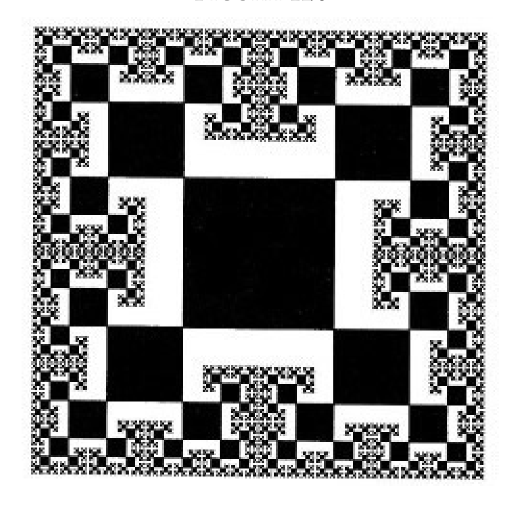


FIGURA 121

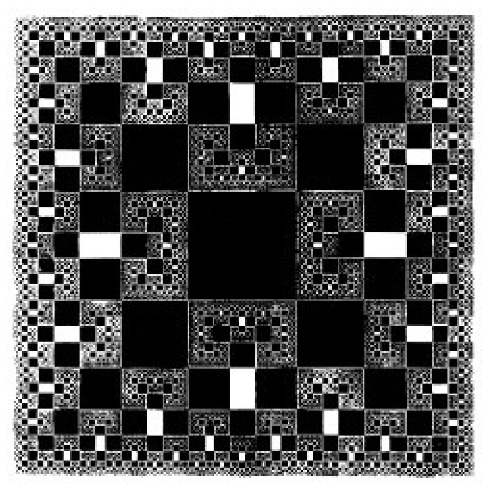


FIGURA 122

Los fractales se pueden construir no sólo a partir de líneas sino también a partir de figuras planas como triángulos y cuadrados. Por ejemplo, se puede empezar con un triángulo equilátero con un lado de longitud de una unidad y en cada esquina del mismo añadir un nuevo triángulo con una longitud de lado de $^1/_2$. En cada una de las esquinas libres de la segunda generación de triángulos, añadiremos un triángulo con un lado de longitud $^1/_4$, y así sucesivamente (figura 119). Pueden preguntarse de nuevo a qué factor de reducción empiezan a tocarse las tres ramas, como en la figura 120, y de nuevo la respuesta es 1/Φ. Lo mismo ocurre si se construye un fractal similar utilizando un cuadrado (figura 121): se superponen cuando el factor de reducción es 1/Φ = 0,618… (figura 122). Más aún, todos los rectángulos en blanco de la última figura son Rectángulos Áureos. Vemos que mientras que en la geometría euclidiana la Proporción Áurea se originaba a partir del pentagrama, en la geometría fractal se relaciona con figuras más simples como los cuadrados y los triángulos equiláteros.

Cuando uno se acostumbra a este concepto se da cuenta de que el mundo que nos rodea está lleno de fractales. Objetos tan diferentes como las siluetas de las copas de los árboles de los bosques en el horizonte y el sistema circulatorio en el riñón, pueden describirse utilizando los términos de la geometría fractal. Si es correcto un modelo en particular del universo entero, con una inflación eterna, entonces hasta el universo entero se caracteriza por un modelo fractal. Permítanme que les explique brevemente este concepto, ofreciéndoles una descripción a grandes rasgos. La teoría inflacionaria, avanzada originariamente por Alan Guth, nos sugiere que, cuando nuestro universo no contaba con más de una pequeña fracción de segundo de edad, una expansión descontrolada alargó nuestra región del espacio hasta una tamaño que es en realidad mucho mayor de lo que nuestros telescopios pueden abarcar. La fuerza impulsora tras esta increíble expansión es un estado de la materia muy particular llamado vacío falso. Una pelota en lo alto de una colina plana, como en la figura 123, puede describir esta situación simbólicamente. Mientras el universo permaneció en este estado de falso vacío (con la pelota en lo alto de la colina), se expandió a una velocidad extremada, doblando su tamaño a cada pequeñísima fracción de segundo. Sólo cuando la pelota rodó colina abajo hacia la «zanja» (representando así simbólicamente que el vacío falso declinaba) cesó la tremenda expansión. Según el modelo inflacionario, lo que llamamos *nuestro* universo quedó atrapado en el estado de vacío falso durante un breve periodo de tiempo, en el que se expandió a una velocidad sorprendente. A la larga el vacío falso declina y nuestro universo retoma la expansión mucho más lenta que observamos hoy en día. Toda la energía, así como las partículas subatómicas de nuestro universo, se

originaron durante las oscilaciones que siguieron al descenso (representado esquemáticamente en el tercer dibujo de la figura 123).

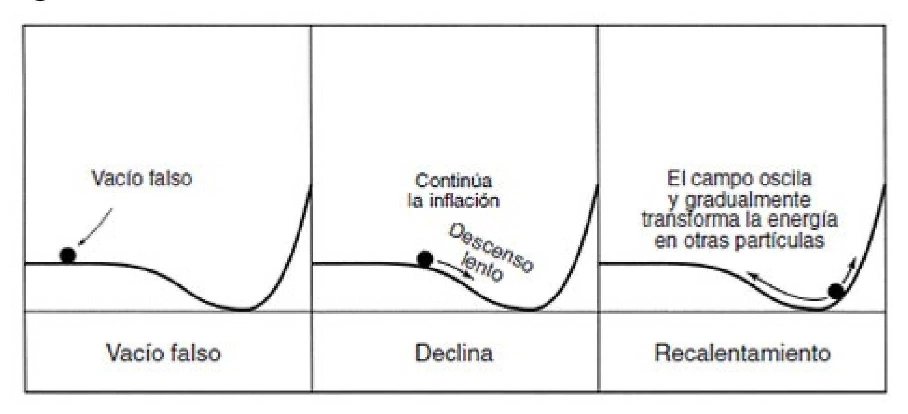


FIGURA 123

Sin embargo, el modelo inflacionario también augura que la tasa de expansión en el estado de falso vacío es mucho más rápida que la tasa de descenso. Por lo tanto, el destino de una región de falso vacío puede ilustrarse esquemáticamente en la figura 124. El universo empezó con alguna región de vacío falso. Con el paso del tiempo, parte de la región (un tercio de la figura) ha declinado hasta producir un «universo de bolsillo» como el nuestro. A su vez, las regiones que permanecieron en el estado de falso vacío siguieron expandiéndose, y en el momento representado esquemáticamente por la segunda barra en la figura 124, cada uno de ellos era en realidad del tamaño de la primera barra entera. (Esto no se muestra en la figura por cuestiones de espacio). Desplazándonos en el tiempo de la segunda barra a la tercera, el universo de bolsillo central siguió desarrollándose lentamente en el modelo estándar de *big bang* de nuestro universo. Sin embargo, cada una de las dos regiones de falso vacío que quedan evolucionaron del mismo modo que la región original de falso vacío (parte de ellas declinó formando un universo de bolsillo). Cada región de

falso vacío se expandió hasta alcanzar el mismo tamaño que la primera barra (de nuevo no se muestra en la figura por cuestiones de espacio). Por consiguiente, se formó un número infinito de universos de bolsillo, generándose un modelo fractal: la misma secuencia de vacíos falsos y de universos de bolsillo se repite en tamaños decrecientes. Si este modelo representa realmente la evolución del universo como tal, entonces nuestro universo de bolsilo no es más que uno de un número infinito de universos de bolsillo.

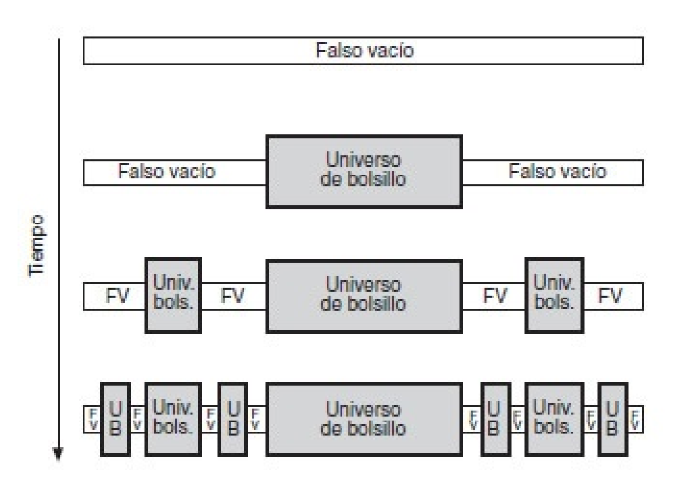


FIGURA 124

En 1990, el profesor Jasper Memory, de la Universidad del Estado de Carolina del Norte, publicó un poema titulado *Blake and Fractals* en la *Mathematics Magazine*. Refiriéndose al verso *Ver el mundo en un grano de arena* del poeta místico William Blake, Memory escribe:

William Blake dijo que podía ver
Vistas de infinitud
En el más pequeño grano de arena
En la palma de su mano.
Modelos de ello tenemos
En la obra de Mandelbrot:

Diagramas fractales participan
De la esencia intuida por Blake.
Formas básicas permanecerán
Sea cual sea la Escala;
De lejos o de cerca
Las cualidades especiales permanecen.
Cuando amplías un punto,
Lo que tenías tienes.
Menor, menor, aún menor,
Los mismos detalles son;
Más fino que el cabello más fino
Ahí está la infinitud de Blake,
De estructura rica goza,
Como el místico poeta dice.

Algunas de las aplicaciones más modernas de la Proporción Áurea, los números Fibonacci y los fractales llegan a unos temas de corte mucho más realista que el modelo inflacionario del universo. De hecho, algunos dicen que son tan realistas que pueden incluso llegar hasta nuestros bolsillos.

UN *TOUR* ÁUREO POR WALL STREET

Uno de los intentos más famosos en utilizar la secuencia de Fibonacci y la Proporción áurea en el análisis de los mercados bursátiles se asocia con el nombre de Ralph Nelson Elliott (1871-1948). Contable de profesión, Elliott ejerció en varios puestos ejecutivos en compañías ferroviarias, principalmente en América Central. Una seria enfermedad del tracto alimentario le dejó postrado en la cama y le obligó a retirarse en 1929. Para mantener la mente ocupada, Elliott empezó a analizar detalladamente las

recuperaciones y las caídas en picado del Dow Jones Industrial Average. Elliott fue testigo directo tanto de la frenética locura que invadió el mercado en la década de los años 20, como la posterior Gran Depresión. Con sus detallados análisis llegó a la conclusión de que las fluctuaciones del mercado no ocurrían por azar. En concreto, se percató de que «el mercado de valores es una creación del hombre y, por tanto, refleja su idiosincrasia». La principal observación de Elliott era que, al final, los modelos del mercado bursátil reflejan los ciclos de optimismo y pesimismo humano.

El 9 de febrero de 1935 Elliott envió a una publicación de la bolsa de Detroit un tratado titulado *The Wave Principle*, en el que aseguraba haber identificado las características que «definen un principio que determina una tendencia y avisa claramente de un cambio». Más tarde, el tratado se convirtió en libro, llevando el mismo título, publicado en 1938.

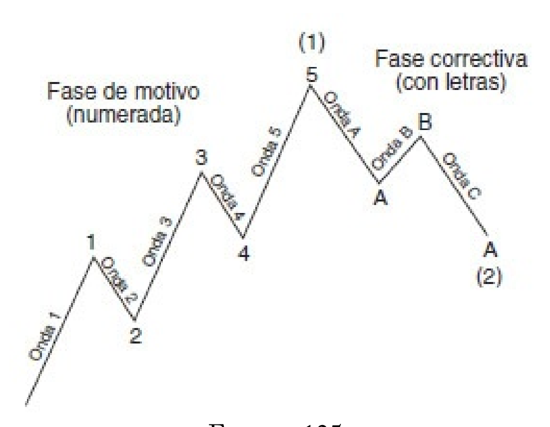


FIGURA 125



FIGURA 126

La idea básica de Elliott era relativamente simple. Aseguraba que las variaciones del mercado se pueden caracterizar por un modelo fundamental que consiste en cinco ondas durante una tendencia ascendente («optimista») (señalada con números en la figura 125) y en tres ondas durante una tendencia descendente («pesimista») (señalada con letras en la figura 125). Nótese que 5, 3, 8 (el número total de ondas) son números Fibonacci. Más aún, Elliott afirmaba que un estudio de la fluctuación a escalas de tiempo cada vez menores revelaba que el mismo modelo se repetía (figura 126), correspondiendo a números Fibonacci más altos, todos los números de las subondas constituyentes. Identificando el 144 como «el mayor número de valor práctico», el desglose de un ciclo de mercado completo puede ser así. A una tendencia ascendente que conste de cinco ondas mayores, veintiuna intermedias y ochenta y nueve menores (figura 126), le sucede una fase generalmente descendente con tres mayores, trece intermedias y cincuenta y cinco menores (figura 126).

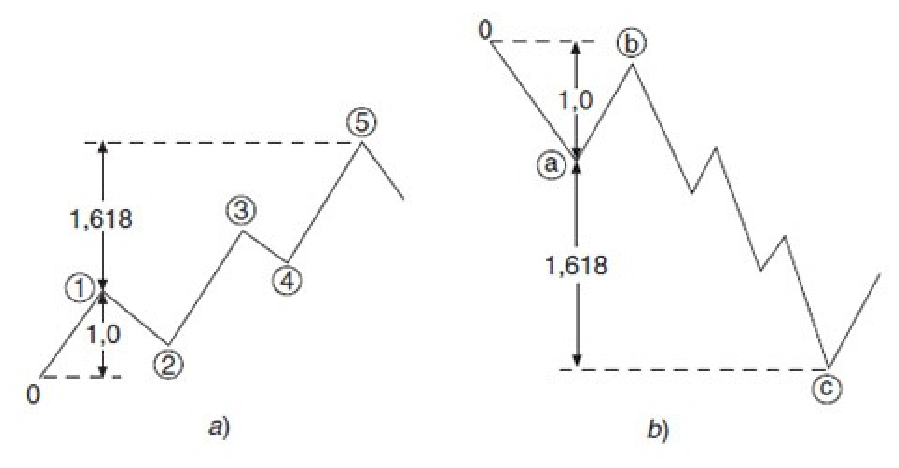


FIGURA 127

Ciertos libros de reciente publicación que pretenden aplicar las ideas generales de Elliott a las estrategias reales de tendencias van aún más allá. Utilizan la Proporción Áurea para calcular los puntos extremos del máximo y el mínimo que puede esperarse (aunque no necesariamente alcanzar) en los mercados de precios al final de las tendencias ascendentes y decrecientes (figura 127). Hasta los algoritmos más sofisticados incluyen una espiral logarítmica trazada en lo alto de las fluctuaciones diarias del mercado, en un intento de representar la relación entre el precio y el tiempo. Todos estos esfuerzos por predecir, asumen que tanto la secuencia de Fibonacci como la Proporción Áurea tienen las claves de la psicología de masas. Sin embargo, esta aproximación a la «onda» sufre algunos contratiempos. Normalmente la «onda» de Elliott es sometida a varios (a veces arbitrarios) estiramientos, apretujones y otras alteraciones manuales para que «prediga» el mercado del «mundo-real». Sin embargo, los inversores saben que las fortunas pueden hacerse o desaparecer en menos de un

segundo, a pesar de toda la parafernalia de las nuevas teorías, que suponen que se deben maximizar las devoluciones pese a un cierto nivel de riesgo.

Habrán notado que la interpretación en ondas de Elliott incluye entre sus ingredientes principales el concepto de que cada parte de la curva es una versión a escala reducida del todo, un concepto central en la geometría fractal. Efectivamente, en 1997 Benoit Mandelbrot publicó un libro titulado *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, que introdujo los modelos fractales bien definidos en la economía de mercado. Mandelbrot basó su teoría en el hecho conocido de que las fluctuaciones en el mercado de valores parecen iguales cuando se amplían o se reducen los gráficos para encajar en las mismas escalas de precio y de tiempo. Si se mira un gráfico de lejos, uno no es capaz de leer las escalas, o de saber si se representan variaciones por días, semanas u horas. La principal innovación de la teoría de Mandelbrot, comparada con la teoría estándar de cartera, es su habilidad para reproducir tanto el comercio alocado, como los mercados plácidos. La teoría de cartera, por otro lado, tan sólo es capaz de definir una actividad relativamente tranquila. Mandelbrot jamás afirmó que su teoría fuera capaz de predecir el día específico en el que se produjera una subida o caída de precios, sino más bien que el modelo podía utilizarse para calcular las probabilidades de salidas potenciales. Después de que Mandelbrot publicara una descripción simplificada de su modelo en *Scientific American* en febrero de 1999, surgió una gran variedad de respuestas por parte de los lectores. Probablemente, Robert Inhot de Chicago fue el que mejor expresó el asombro de muchos cuando escribió: «Si sabemos que un valor oscila de 10$ a 15$ en un tiempo dado, no importa de qué modo interpongamos los fractales, o si el

gráfico parece o no auténtico. Lo importante es que podemos comprar a 10$ y vender a 15$. Todos deberían ser ricos, entonces ¿por qué no lo son?»

El original principio de onda de Elliott representó un intento valiente, aunque algo inocente, de identificar un patrón en lo que parece ser un proceso al azar. Más recientemente, sin embargo, los números Fibonacci y el azar han tenido un encuentro todavía más intrigante.

CONEJOS Y A CARA O CRUZ

La propiedad que define la secuencia de Fibonacci, la de que cada número es la suma de los dos anteriores, se obtuvo mediante la descripción nada realista de la cría de conejos. No había nada en esta descripción que hiciera pensar que esta secuencia imaginaria de conejos aparecería en tantos fenómenos naturales y culturales. Y menos aún, sin embargo, que sugiriera que la experimentación con las propiedades básicas de la secuencia fuera una puerta al entendimiento de las matemáticas de sistemas desordenados. Pero esto fue precisamente lo que ocurrió en 1999. El científico informático Divakar Viswanath, por entonces miembro posdoctoral del Mathematical Sciences Research Institute de Berkeley, California, fue lo suficientemente valiente como para preguntar «¿qué pasaría si?» lo que le llevó inesperadamente al descubrimiento de un nuevo número especial: 1,13198824… La belleza del descubrimiento de Viswanath se halla principalmente en la simplicidad de su idea central. Viswanath se preguntó: supongamos que empezamos con los dos números 1,1, como en la secuencia de Fibonacci original, pero ahora, en lugar de sumar los dos números para obtener el tercero, lo echaremos a cara o cruz para decidir si sumamos o restamos el último número al primero. Decidamos, por ejemplo, que

«caras» significan sumar (siendo 2 el tercer número), y «cruces» restar (siendo 0 el tercer número). Continuemos con el mismo procedimiento, decidiendo a cara o cruz si sumamos o restamos el último número para obtener uno nuevo. Por ejemplo, la serie CCRCRCCCRCRCCRC[2] producirá la secuencia 1, 1, 2, −1, 3, 2, 5, −3, 2, −5, 7, 2. Por otro lado, la (poco probable) serie CCCCCCCCCCCC… producirá la secuencia de Fibonacci.

En la secuencia de Fibonacci, los términos aumentan rápidamente, como el poder de la Proporción Áurea. Recordemos que podemos calcular el número 17º de la secuencia, por ejemplo, elevando la Proporción Áurea a la decimoséptima potencia, partido por la raíz cuadrada de 5, y redondeando el resultado al número entero más cercano (lo que da 1.597). Aunque las secuencias de Viswanath fueron generadas por una serie de lanzamientos de moneda totalmente aleatorios, no era del todo obvio que pudiera obtenerse un modelo de crecimiento suave, aunque ignoráramos los signos negativos y nos quedáramos sólo con el valor absoluto de los números. Sin embargo, para su sorpresa, Viswanath se dio cuenta de que si ignoraba los signos negativos, los valores de los números en las secuencias al azar aumentarían en una tasa claramente definida y predecible. Especialmente, con una probabilidad del cien por cien, el número que hace cien en cualquiera de las secuencias generadas de este modo sería siempre cercano a la potencia 100ª del peculiar número 1,13198824… y cuanto mayor fuera la cifra en la secuencia más cercana estaría a la correspondiente potencia de 1,13198824… Para poder calcular este extraño número, Viswanath tuvo que utilizar fractales y confiar en un poderoso teorema matemático formulado a principios de 1960 por los matemáticos Hillel Furstenberg de la Universidad Hebrea de Jerusalén y Harry

Kesten de la Universidad Cornell. Estos dos matemáticos demostraron que para una clase entera de secuencias generadas al azar, el valor absoluto de un número elevado en la secuencia se acerca cada vez más a la potencia correspondiente de un número fijo. Sin embargo, Furstenberg y Kesten no sabían cómo calcular este número fijo; Viswanath descubrió cómo.

La importancia de la obra de Viswanath radica no sólo en el descubrimiento de una nueva constante matemática, un hito significativo por sí mismo, sino también en el hecho de que ejemplifica de un modo magnífico cómo lo que parece un proceso totalmente aleatorio puede llevar a un resultado totalmente determinado. Se encuentran problemas de este tipo en una variedad de fenómenos naturales y aparatos eléctricos. Por ejemplo, las estrellas como nuestro Sol producen su energía en «hornos» nucleares situados en sus centros. Sin embargo, para que nosotros veamos brillar las estrellas, grupos de radiación, conocidos como fotones, tienen que viajar desde las profundidades estelares hasta la superficie. Los fotones no vuelan simplemente a través de la estrella a la velocidad de la luz. Más bien rebotan, siendo esparcidos, absorbidos y reenviados por todos los electrones y átomos de gas que encuentran a su paso de un modo que parece aleatorio. Pero el resultado es que, tras un paseo aleatorio, que en el caso del Sol le lleva diez millones de años, la radiación se escapa de la estrella. El poder emitido por la superficie del Sol determinó (y lo continúa haciendo) la temperatura de la superficie de la tierra y permitió que surgiera la vida. La obra de Viswanath y la investigación de los Fibonaccis aleatorios que le siguió, otorgan herramientas extra a la maquinaria matemática que explica los sistemas desordenados.

Existe otra lección importante que aprender del descubrimiento de Viswanath: incluso un problema matemático de apariencia trivial que cuenta con ochocientos años de antigüedad puede resultar sorprendente.

9
¿ES DIOS UN MATEMÁTICO?

Intentaré tratar el vicio y la locura humanas
de forma geométrica… las pasiones del odio, la rabia,
la envidia, etc., consideradas en sí mismas, se derivan
de la necesidad y eficacia de la naturaleza… por tanto,
trataré la naturaleza y fuerza de las emociones
exactamente del mismo modo,
como si me interesaran las líneas, planos y sólidos.
BARUCH SPINOZA (1632-1677)

Para los matemáticos dos y dos continúa
siendo cuatro, a pesar del lloriqueo del amateur
por el tres o el llanto del crítico por el cinco.
JAMES MCNEILL WHISTLER (1834-1903)

Euclides definió la Proporción Áurea porque le interesaba utilizar esta proporción para la construcción del pentágono y el pentagrama. Si toda aplicación de la Proporción Áurea se hubiese detenido aquí, jamás habría escrito este libro. El placer que hacemos derivar de este concepto, hoy en día se basa, fundamentalmente, en el elemento *sorpresa*. La Proporción Áurea resultó ser, por un lado, la más simple de las fracciones continuas (pero también el «más irracional» de los números irracionales) y, por el otro, el corazón de un número inacabable de fenómenos naturales complejos. De algún modo, la Proporción Áurea siempre aparece por sorpresa en la yuxtaposición de lo simple y lo complejo, en la intersección de la geometría euclidiana y la geometría fractal.

El sentimiento de gratificación que proporciona la aparición sorprendente de la Proporción Áurea probablemente se acerca mucho a lo que podemos esperar del placer visual que obtenemos de una obra de arte. De este hecho se deriva la cuestión de qué tipo de juicio estético podemos aplicar a las matemáticas o, incluso de forma más

específica, a qué se refería el famoso matemático británico Godfrey Harold Hardy (1877-1947) cuando dijo: «Los modelos del matemático, como los del pintor o el poeta, deben ser hermosos».

No es ésta una pregunta fácil. Al hablar de los experimentos sicológicos que comprobaban el aspecto visual del Rectángulo Áureo, evité deliberadamente el término «bello». Adoptaré la misma estrategia aquí, dada la ambigüedad asociada con la definición de belleza. La mejor manera de averiguar hasta qué punto la belleza está presente en los ojos del observador por lo que se refiere a las matemáticas es a través del magnífico ejemplo presentado en una de las historias del excelente libro de 1981 *The Mathematical Experience*, de Philip J. Davis y Reuben Hersh.

En 1976, una delegación de distinguidos matemáticos de los Estados Unidos fue invitada a la República Popular China para una serie de charlas y reuniones informales con matemáticos chinos. Posteriormente, la delegación publicó un informe titulado «Matemáticas puras y aplicadas en la República Popular China». Por «pura», los matemáticos se suelen referir al tipo de matemáticas que en apariencia no guardan relación directa con el mundo exterior a la mente. Al mismo tiempo, debemos tener presente que las baldosas de Penrose y los azarosos Fibonaccis, por ejemplo, son dos de los numerosos ejemplos de matemáticas «puras» que se convierten en «aplicadas». Uno de los diálogos en el informe de la delegación entre el matemático de Princeton, Joseph J. Kohn, y uno de sus huéspedes chinos, es especialmente reveladora. El diálogo giraba en torno a la «belleza de las matemáticas», y se produjo en la Universidad de Shanghai Hua-Tung:

Kohn: ¿No tratarías de la belleza de

matemáticas? ¿No podría inspirar a l
alumnos? ¿Cabe la belleza en la ciencia?

Respuesta: La prioridad es la producción.

Kohn: Esto no es una respuesta.

Respuesta: La geometría se desarrolló para ponerl
práctica. La evolución de la geometría no p
satisfacer a la ciencia ni a la tecnología;
siglo XVII, Descartes descubrió la geom
analítica. Analizó pistones y tornos y tam
los principios de la geometría analítica
trabajo de Newton originó el desarrollo
industria. Newton comentó: «La base
cualquier teoría es la práctica social». No e
ninguna teoría de la belleza con la que la g
se ponga de acuerdo. Algunos creen que al
bello, otros que lo es otra cosa. Aquí
construcciones socialistas son hermosa
estimulan a la gente. Antes de la Revolu
Cultural, algunos creíamos en la belleza d
matemáticas pero no servían para res
cuestiones prácticas; ahora, nos dedicam
agua y a las tuberías de gas, a los cables y
molinos. Lo hacemos por el país y
trabajadores nos lo agradecen. Es
sentimiento muy hermoso.

Ya que, como indica este diálogo tan austero, no existe prácticamente ninguna descripción formal y aceptada del juicio estético en matemáticas y el modo de aplicación, prefiero pasar a hablar de un elemento en particular de las matemáticas que de modo invariable proporciona placer tanto a los no-expertos como a los expertos: el elemento sorpresa.

LAS MATEMÁTICAS DEBEN SORPRENDER

En una carta del 27 de febrero de 1818, el poeta romántico John Keats (1795-1821) escribió: «La poesía debe sorprender mediante el exceso elegante y no mediante la singularidad; debe chocar al lector como si fuera una formulación de sus pensamientos más elevados y aparecer como si fuera un recuerdo». Sin embargo, a diferencia de la poesía, las matemáticas suelen deleitar más cuando muestran un resultado no previsto que cuando responden a las expectativas del lector. Además, el placer derivado de las matemáticas se relaciona en muchas ocasiones con la sorpresa que se siente al percibir relaciones y unidades totalmente inesperadas. Una relación matemática conocida como ley de Benford proporciona un poderoso caso de estudio para averiguar de qué modo todos estos elementos se combinan para producir un gran sentimiento de satisfacción.

Fíjese, por ejemplo, en el *World Almanac*, en la tabla de «*Marketing* de granjas por estado de los Estados Unidos» de 1999. Hay una columna para «Cosechas» y otra para «Ganado y Productos». Los números se proporcionan en dólares estadounidenses. Quizá piense que los números del 1 al 9 se deberían repetir con la misma frecuencia entre los primeros dígitos de todos los *marketings* de la lista. Especialmente, los números que empiezan por 1 deberían constituir cerca de una novena parte de todos los números en la lista, del mismo modo que los que empiezan por 9. Aun así, si los cuenta, descubrirá que el número 1 aparece como primer dígito en un 32 por ciento de los números (en lugar del esperado 11 por ciento si todos los dígitos aparecieran con la misma frecuencia). El número 2 también tiene una frecuencia mayor de la esperada (apareciendo en un 19 por ciento de los números). El número 9, por otro

lado, aparece sólo en el 5 por ciento de los números, menos de lo esperado. Quizás crea que encontrar este resultado en una tabla sea sorprendente, pero no inesperado, hasta que examine unas cuantas páginas más del *Almanaque* (los números anteriormente citados son del 2001). Por ejemplo, si miramos la tabla de fallecidos en algunos «grandes terremotos», descubrirá que los números que empiezan por 1 constituyen un 38 por ciento de todos los números y que los que empiezan por 2 son un 18 por ciento. Si se escoge una tabla totalmente diferente, como la de la población de Massachusetts, en lugares de más de 5.000 habitantes, los números que empiezan por 1 aparecen un 36 por ciento de las veces, y con 2, un 16, 5 por ciento. Por otro lado, en todas estas tablas el número 9 aparece en primer lugar sólo en el 5 por ciento de los casos, mucho menos que el esperado 11 por ciento. ¿Cómo puede ser que tablas que describen datos tan diferentes y aparentemente al azar tengan todas la propiedad de la aparición del número 1 como primer dígito alrededor del 30 por ciento de las veces y el número 2 alrededor del 18? La situación es aún más desconcertante cuando examinamos bases de datos mayores. Por ejemplo, el profesor de contabilidad Mark Nigrini de la Cox School of Business de la Universidad Metodista del Sur, Dallas, examinó las poblaciones de 3.141 condados en el censo de los Estados Unidos de 1990. Se dio cuenta que el número 1 aparecía como primer dígito en el 32 por ciento de los casos, el 2, en un 17 por ciento, el 3, en un 14, y el 9 en menos de un 5 por ciento. El analista Eduardo Ley de Recursos para el Futuro, Washington DC, halló números muy similares en el Dow Jones Industrial Average entre los años 1990 y 1993. Y si todo esto no es lo suficientemente increíble, he aquí otro dato sorprendente. Si examina la lista de, digamos, doscientos números Fibonacci, descubrirá que

el número 1 aparece como primer dígito en el 30 por ciento de los casos, el número 2 en el 17, 65 por ciento, el 3 en el 12, 5 por ciento y los valores continúan decreciendo, con el 9 apareciendo en 4, 6 por ciento de veces como primer dígito. De hecho, es más probable que los números Fibonacci empiecen por 1, y que los otros números disminuyan su popularidad ¡*precisamente del mismo modo como lo hacen las selecciones de números al azar antes descritas*!

El astrónomo y matemático Simon Newcomb (1835-1909) descubrió por primera vez este «fenómeno de primer dígito» en 1881. Newcomb se dio cuenta de que los libros sobre logaritmos de la biblioteca, que se usaban para los cálculos, estaban considerablemente más sucios al principio (donde los números impresos empezaban por 1 y 2) y progresivamente más limpios a medida que avanzaban. Aunque esto es más probable que se produzca con novelas malas abandonadas por lectores aburridos, en el caso de las tablas matemáticas, simplemente indican una aparición más frecuente de números que empiezan por 1 y 2. Newcomb, sin embargo, fue mucho más lejos; creó una *fórmula* que en teoría daba la probabilidad existente de que un número al azar empezara por un dígito en particular. Esta fórmula (presentada en el apéndice 9) le otorga al 1 una probabilidad del 30 por ciento; al 2, un 17, 6 por ciento; al 3, un 12, 5 por ciento; al 4 un 9, 7 por ciento; al 5, un 8 por ciento; al 6 un 6, 7 por ciento; al 7 un 5, 8 por ciento; al 8 un 5 por ciento; y al 9 un 4, 6 por ciento. El artículo de Newcomb de 1881 en el *American Journal of Mathematics* y la «ley» que descubrió pasaron totalmente inadvertidos, hasta que 57 años después, cuando el físico Frank Benford de General Electric redescubrió la ley (de forma aparentemente independiente) y la comprobó con numerosos datos de cuencas fluviales, estadísticas de béisbol e incluso en

números que aparecían en artículos del *Reader's Digest*. Todos los datos encajan con la fórmula postulada de un modo sorprendente, y por tanto esta fórmula es conocida hoy en día como ley de Benford.

No todas las listas de números obedecen a la ley de Benford. Los números de las guías telefónicas, por ejemplo, tienden a empezar con los mismos dígitos para cada región. Incluso las tablas de raíces cuadradas de números tampoco obedecen a la ley. Por otro lado, son muchas las posibilidades de obtener un resultado que encaje bien si recoge todos los números que aparecen en la primera página de los periódicos locales durante una semana. ¿Pero cómo puede ser? ¿Qué tiene que ver la población de las ciudades de Massachusetts con las lista de fallecidos de terremotos por todo el mundo o con los números que aparecen en el *Reader's Digest*? ¿Por qué los números Fibonacci obedecen a la misma ley?

Los intentos por dotar a la ley de Benford de una base matemática sólida han sido más difíciles de lo esperado. Uno de los principales obstáculos ha sido precisamente el hecho de que no todas las listas de números obedecen a la ley (incluso los anteriores ejemplos del *Almanaque* no obedecen a la ley de forma precisa). En su artículo de 1969 del *Scientific American* en el que se describe la ley, el matemático de la Universidad de Rochester, Ralph A. Raimi, concluyó que «la respuesta continúa sin desvelarse».

La explicación finalmente apareció en 1995-1996, en el trabajo del matemático del Instituto de Tecnología de Georgia, Ted Hill. Hill se interesó por vez primera en la ley de Benford mientras preparaba una charla sobre sorpresas en la probabilidad, a principios de 1990. Cuando me explicó su experiencia, Hill dijo: «Empecé a trabajar en este problema

como si fuera un experimento recreativo, pero unos cuantos me advirtieron de que fuera cauteloso, porque la ley de Benford puede resultar adictiva». Tras unos cuantos años de trabajo, finalmente descubrió que en lugar de observar los números desde una fuente en concreto, la clave era la *mezcla* de datos. Hill formuló la ley de un modo distinto satisfactoriamente: «Si se seleccionan las distribuciones al azar (sin prejuicios) y se toman muestras al azar de cada una de estas distribuciones, entonces las frecuencias de dígitos significativos de las *muestras combinadas* convergerán en la distribución de Benford, incluso si alguna de las distribuciones individuales seleccionadas no cumple la ley». En otras palabras, suponga que reúne colecciones al azar de números de un batiburrillo de distribuciones, tales como una tabla de raíces cuadradas, una tabla de defunciones de desastres aéreos notables, la población de países y una tabla de las distancias aéreas entre varias ciudades del mundo. Algunas de estas distribuciones no obedecen a la ley de Benford por sí mismas. Lo que demostró Hill, sin embargo, es que, al recoger más de estos números, los dígitos de estos números darán frecuencias que se acercarán aún más a las predicciones de la ley. ¿Por qué los números Fibonacci siguen también la ley de Benford? Después de todo, están totalmente determinados por una relación recursiva y no son muestras al azar de distribuciones al azar.

Bueno, en este caso parece ser que la conformidad con la ley de Benford no es una propiedad única de los números Fibonacci. Si examinamos un número importante de potencias de 2 ($2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, etc.), observará que también obedecen a la ley de Benford. Esto no debería resultar sorprendente, dado que los números Fibonacci por sí mismos se obtienen a partir de potencias de la Proporción Áurea (recuerde que el número Fibonacci se acerca a Φ^n/

$\sqrt{5}$). De hecho, podemos demostrar que las secuencias definidas por una gran clase de relaciones recursivas siguen la ley de Benford.

La ley de Benford proporciona otro fascinante ejemplo de las matemáticas puras transformadas en aplicadas. Una interesante aplicación es la detección del fraude o la fabricación de datos en la evasión de impuestos y cuentas corrientes. En un gran número de documentos financieros, los datos se adaptan con bastante precisión a la ley de Benford. Los datos inventados, por otro lado, lo hacen en pocas ocasiones. Hill demuestra cómo funciona dicha detección del fraude con otro ejemplo sencillo, usando la teoría de probabilidades. En su primer día de clase en un curso de probabilidad, pide a los estudiantes que realicen un experimento. Si el apellido de soltera de su madre empieza por A hasta la L, deben lanzar una moneda 200 veces y apuntar los resultados. Pide al resto de la clase que finja toda una secuencia de 200 valores. Hill recoge los resultados al día siguiente, y en un corto espacio de tiempo es capaz de separar la genuina de la que no lo es con una precisión del 95 por ciento. ¿Cómo lo consigue? Cualquier secuencia de 200 lanzamientos de moneda genuinos contienen una ronda de seis caras consecutivas o seis cruces consecutivas con una probabilidad muy alta. Por otro lado, la gente que intenta fingir una secuencia de lanzamientos de monedas en pocas ocasiones siente la necesidad de anotar tal secuencia.

Un caso reciente en que se utilizó la ley de Benford para descubrir un fraude implicó a una empresa estadounidense de ocio y vacaciones. El contable de la empresa descubrió algo que le resultó extraño a raíz de una queja del supervisor del departamento de salud de la empresa. Los primeros dos dígitos de los pagos de dicho

departamento mostraban un sospechoso recorte en los números que empezaban por 65 al ser comprobada su conformidad mediante la ley de Benford. (Una versión más detallada de la ley también precede la frecuencia del segundo y último dígito; ver apéndice 9). Una auditoría detallada reveló trece cheques fraudulentos que sumaban entre 6.500$ y 6.599$. La oficina del Fiscal del Distrito en Brooklyn, Nueva York, también utilizó análisis basados en la ley de Benford para detectar el fraude contable en siete empresas de Nueva York.

La ley de Benford contiene algunos de los ingredientes sorpresa que muchos matemáticos encuentran atractivos. Refleja un hecho simple pero chocante: la distribución de los primeros dígitos es extremadamente peculiar. Además, este hecho resulto ser difícil de explicar. Los números, con la Proporción Áurea como un ejemplo fuera de lo común, a veces proporcionan una gratificación más instantánea. Por ejemplo, muchos matemáticos profesionales y *amateurs* están fascinados por los primos. ¿Por qué son tan importantes los primos? Porque el «Teorema fundamental de la aritmética» afirma que cada número entero mayor de 1 puede expresarse como un producto de números primos. (Nótese que el 1 no es considerado un primo). Por ejemplo, 28 = 2 × 2 × 7; 66 = 2 × 3 × 11; etc. Los primos están tan arraigados en la comprensión humana de las matemáticas que en su libro *Cosmos*, cuando Carl Sagan (1934-1996) tuvo que describir qué tipo de señal transmitiría una civilización inteligente a través del espacio eligió como ejemplo la secuencia de primos. Sagan escribió: «Es extremadamente improbable que cualquier proceso físico pueda transmitir mensajes de radio que contengan sólo números primos. Si recibimos un mensaje de este tipo deduciremos que una civilización de ahí fuera al menos está orgullosa de los números primos». El

gran Euclides demostró hace más de dos mil años que existen infinidad de primos. (La elegante demostración se presenta en el apéndice 10). A pesar de esto, son muchos los que estarían de acuerdo en que algunos primos son más atractivos que otros. Algunos matemáticos, como el francés François Le Lionnais y el estadounidense Chris Caldwell, mantienen listas de números «importantes» o «titánicos». A continuación, unos cuantos ejemplos intrigantes del gran tesoro de los primos:

- El número 1.234.567.891 que recorre todos los dígitos, es un número primo.
- El primo 230º, que tiene 6.400 dígitos, está compuesto de 6.399 nueves y sólo un ocho.
- El número compuesto de 317 iteraciones del dígito 1 es primo.
- El primo 713º puede escribirse como $(10^{1951}) \times (10^{1975} + 1991991991991991991991) + 1$, y fue descubierto en —puede imaginárselo— 1991.

Desde la perspectiva de este libro, la conexión entre primos y números Fibonacci es de especial interés. Con la excepción del número 3, cada número Fibonacci que es primo también tiene un primo suscrito (su orden en la secuencia). Por ejemplo, el número Fibonacci 233 es un primo, y es el decimotercer número (también un primo) en la secuencia. Lo contrario, sin embargo, no es cierto: el hecho de que el suscrito sea un primo no significa necesariamente que el número también sea primo. Por ejemplo, el decimonoveno número (19 es primo) es 4.181, y 4.181 no es primo, es igual a 113 × 37.

El número de primos Fibonacci conocidos se ha incrementado exponencialmente a lo largo de los años. En 1979, el primo Fibonacci más largo conocido era el que

ocupaba la posición 531 en la secuencia. A mitad de las años 90, el más largo conocido era el que ocupaba la posición 2.971; y en 2001, el que ocupaba la posición 81.839 demostró ser un primo con 17.103 dígitos. Así, ¿existe un número infinito de primos Fibonacci (como existe un número infinito de primos)? Nadie lo sabe, y éste es probablemente el mayor misterio matemático sin resolver de los números Fibonacci.

EL PODER IRRACIONAL DE LAS MATEMÁTICAS

La colección de diálogos *Intentions* contiene la filosofía estética del famoso dramaturgo y poeta Oscar Wilde (1854-1900). En dicha colección, el diálogo «The Decay of Lying» es una presentación particularmente provocativa de las ideas de Wilde sobre «la nueva estética». En la conclusión de este diálogo, uno de los personajes (Vivian) resume:

> La vida imita al Arte mucho más que el Arte imita a la vida. Esto se deriva no únicamente del instinto imitativo de la Vida, sino del hecho de que el deseo autoconsciente de la Vida es encontrar la expresión, y que el Arte ofrece ciertas formas hermosas mediante las cuales se puede materializar dicha energía. Se trata de una teoría sin precedentes, pero es extremadamente fecunda y proyecta nueva luz sobre la historia del Arte.
>
> Se sigue, como corolario de todo esto, que la naturaleza externa también imita al Arte. Los únicos efectos que puede mostrarnos son efectos que ya hemos visto a través de la poesía o en la pintura. Éste es el secreto del encanto de la naturaleza, así como la explicación de su debilidad.

En este pasaje, prácticamente podemos sustituir «Arte» por «Matemáticas» y obtener una afirmación que refleja la realidad con la que han luchado muchas mentes sobresalientes. En palabras del propio Einstein: «¿Cómo es posible que las matemáticas, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, encaje tan bien con los objetos de la realidad física?» Otro físico fuera de lo común, Eugene Wigner (1902-1995), conocido por sus numerosas contribuciones a la física nuclear, ofreció en 1960

una famosa conferencia titulada «La efectividad irracional de las Matemáticas en las ciencias físicas». Debemos preguntarnos, por ejemplo, ¿cómo es posible que se descubriera que los planetas en órbita alrededor del Sol siguen una curva (una elipse) que fue explorada por los geómetras griegos mucho antes de que se descubrieran las leyes de Kepler? ¿Por qué la explicación de la existencia de cuasicristales se basa en la Proporción Áurea, un concepto concebido por Euclides con propósitos puramente matemáticos? ¿No es sorprendente que la estructura de tantas galaxias que contienen miles de millones de estrellas sigan de cerca la curva favorita —la magnífica espiral logarítmica— de Bernoulli? ¿Por qué las leyes de la física se expresan mediante ecuaciones matemáticas?

Pero esto no es todo. El matemático John Forbes Nash (hoy en día famoso en todo el mundo a raíz del libro y la película biográfica *Una mente maravillosa*), por ejemplo, compartió el premio Nobel de Economía de 1994 porque su disertación matemática (escrita a la edad de 24 años) que trataba del «Equilibrio Nash» para juegos estratégicos no-cooperativos inauguró una revolución en campos tan diversos como la economía, la biología evolutiva y la ciencia política. ¿Qué es lo que hace que las matemáticas funcionen tan bien?

El reconocimiento de la extraordinaria «efectividad» de las matemáticas logró colarse en un pasaje histéricamente divertido de la novela de Samuel Beckett, *Molloy*, sobre la que tengo una historia personal que contar. En 1980, dos colegas de la Universidad de Florida y yo escribimos un ensayo sobre las estrellas de neutrones, objetos astronómicos extremadamente compactos y densos, resultado del colapso gravitacional de los núcleos de estrellas masivas. El ensayo

era más matemático que la enorme variedad de ensayos astronómicos, y por lo tanto, decidimos añadirle un lema apropiado para la primera página. El lema dice así:

«Extraordinario cómo te ayudan las matemáticas…»

SAMUEL BECKETT, *Molloy*

Este pasaje se citó extrayéndolo de la primera de las novelas de la trilogía *Molloy, Malone Muere* y *El Innombrable* del famoso escritor y dramaturgo Samuel Beckett (1906-1989). Por cierto, las tres novelas representan la búsqueda de uno mismo: la búsqueda de la identidad por parte de escritores mediante la escritura. Observamos a los personajes en estados de decadencia mientras persiguen un significado a su existencia.

Los ensayos en astrofísica pocas veces tienen lemas. Por tanto, recibimos una carta del editor del *The Astrophysical Journal* informándonos de que, aunque también le gustaba Samuel Beckett, no veía la necesidad de incluir el lema. Le contestamos que dejaríamos la decisión de publicarlo a su entera disposición, y el ensayo se publicó con el lema en el número del 15 de diciembre. Sin embargo aquí ofrecemos el pasaje completo de *Molloy*:

> Y en invierno, bajo mi gran abrigo, me arropaba entre hojas de periódico y no me las quitaba de encima hasta que la tierra despertara para siempre en abril. *The Times Literary Supplement* se adaptaba maravillosamente bien a este propósito, el de la dureza que nunca falla y el de la impermeabilidad. Ni los pedos lo inquietaban. No puedo evitarlo, el gas se escapa de mi fundamento a la mínima, es difícil no mencionarlo de vez en cuanto, a pesar de mi asco. Un día los conté. Trescientos quince pedos en diecinueve horas, a una media de más de dieciséis pedos por hora. Después de todo no es excesivo. Cuatro pedos cada cinco minutos. No es nada. Ni tan siquiera un pedo cada cuatro minutos. Es increíble. Maldita sea, apenas me tiro pedos, no debería ni haberlo mencionado. Extraordinario cómo te ayudan las matemáticas a conocerte a ti mismo.

La historia de las matemáticas ha producido por lo menos dos intentos, filosóficamente muy diferentes, para responder a la pregunta del increíble poder de las matemáticas. Las respuestas están relacionadas también con el tema fundamental sobre la verdadera naturaleza de las matemáticas. Una discusión general sobre estos temas podría llenar volúmenes enteros y está más allá de las pretensiones de este libro. Por tanto, sólo daré una breve descripción de alguna de las líneas de pensamiento y presentaré mi opinión personal. Una visión de la naturaleza de las matemáticas, apodada tradicionalmente como la «visión platónica», es que son universales y atemporales, y que su existencia es un hecho objetivo independiente de nosotros los humanos. Según esta visión platónica, las matemáticas siempre han estado allí, en un mundo abstracto, para que los humanos las descubramos, como Miguel Ángel creyó que sus esculturas existían dentro del mármol y que él simplemente se encargaba de descubrirlas. La Proporción Áurea, los números Fibonacci, la geometría euclidiana y las ecuaciones de Einstein forman todas parte de esta realidad platónica que trasciende la mente humana. Los que apoyan esta teoría platónica consideran al famoso lógico austriaco Kurt Gödel (1906-1978) como un platónico auténtico. Señalan que éste no sólo dijo sobre los conceptos matemáticos que «también pueden representar un aspecto de la realidad objetiva» sino que sus «teoremas sobre lo incompleto» por sí mismos podían ser argumentos a favor de la visión platónica. Estos teoremas, probablemente el resultado más celebrado de toda la lógica, demuestran que para cualquier sistema formal axiomático (por ejemplo, la teoría de los números) existen afirmaciones formulables en su lenguaje que *ni pueden probarse ni dejarse de probar*. En otras palabras, la teoría de los números, por ejemplo, está

«incompleta» en el sentido de que hay afirmaciones *verdaderas* sobre la teoría de los números que los métodos teóricos de demostración son incapaces de probar. Para probarlos, debemos recurrir a un sistema más elevado y rico, en el que de nuevo puedan hacerse otras afirmaciones verdaderas que no pueden demostrarse, y así sucesivamente *ad infinitum*. El científico informático y autor Douglas R. Hofstadter lo expresó en pocas palabras en su fantástico libro *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*: «La probabilidad es una noción más débil que la verdad». En este sentido, jamás existirá un método formal para determinar si es absolutamente cierta una proposición matemática, como existe una forma de determinar si una teoría de física lo es. El matemático físico de Oxford, Roger Penrose, se encuentra entre los que creen que los teoremas de Gödel argumentan sólidamente la existencia de un mundo matemático platónico. En su maravilloso y provocador libro *Shadows of the Mind*, Penrose comenta: «La verdad matemática no está determinada arbitrariamente por las reglas de algún sistema formal "hecho-por-el-hombre", sino que tiene una naturaleza absoluta y yace más allá de cualquier sistema de reglas específicas». A lo que añade: «El apoyo de los puntos de vista platónicos… fue una parte importante de las motivaciones iniciales de Gödel». El matemático británico del siglo XX, G. H. Hardy, también creía que la función humana era «descubrir u observar» las matemáticas más que inventarlas. En otras palabras, el paisaje abstracto de las matemáticas estaba allí, esperando que los exploradores matemáticos lo descubrieran.

Una de las soluciones propuestas al misterio de la efectividad de las matemáticas a la hora de explicar la naturaleza reside en la intrigante modificación de las ideas platónicas. Este «punto de vista platónico modificado»

sugiere que las leyes de la física se expresan como ecuaciones matemáticas, la estructura del universo es un fractal, las galaxias se disponen a sí mismas en espirales logarítmicas, etc., porque las matemáticas son el *lenguaje del universo*. De forma específica, todavía se considera que los objetos matemáticos existen objetivamente, de forma independiente de nuestro conocimiento de ellos, pero en lugar de colocar a las matemáticas en algún plano abstracto místico, al menos alguna parte de ellas se sitúan en el cosmos real. Si deseamos comunicarnos con una civilización inteligente a 10.000 años luz de distancia, lo único que tenemos que hacer es transmitir el número 1,6180339887… y seguro que lo comprenden, ya que es indudable que el universo les ha impuesto las mismas matemáticas. Realmente, Dios es un matemático.

Esta visión platónica modificada fue precisamente la creencia expresada por Kepler (coloreada por sus tendencias religiosas) cuando escribió que la geometría «le proporcionaba a Dios los modelos para la creación del mundo, y se lo pasó al Hombre junto con la imagen de Dios; y de hecho no se hizo evidente a los ojos». Galileo Galilei pensaba de un modo similar:

> La filosofía se escribe en este gran libro, es decir, el universo, que continuamente se abre ante nosotros, pero que no se puede entender a no ser que uno primero aprenda a comprender su lenguaje e interprete lo que en él se ha escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus palabras son los triángulos, los círculos, así como otras figuras geométricas, sin las que es humanamente imposible entender nada de lo que dice; sin ellas, uno se encuentra vagando en un oscuro laberinto.

El poeta y artista místico William Blake, tenía una opinión diferente sobre este Dios matemático. Blake despreciaba las explicaciones científicas de la naturaleza. Para él, Newton y los científicos posteriores simplemente conspiraban para desentrañar el arco iris, para conquistar

todos los misterios de la vida humana a través de normas. Por esta razón, en el poderoso aguafuerte de Blake *El anciano de los días* (figura 128; actualmente en la Pierpont Morgan Library, Nueva York), retrata un dios malvado esgrimiendo un compás, no para establecer un orden universal, sino para cortar las alas de la imaginación.



FIGURA 128

Kepler y Galileo, sin embargo, no fueron los últimos matemáticos en adoptar esta versión «modificada» de la visión platónica, ni esas versiones se limitaron a aquellos que, como Newton, daban por hecha la existencia de una Mente Divina. El gran matemático, astrónomo y físico francés Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) escribió en su *Théorie Analitique des Probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades; 1812):

> Dada, por un instante, una inteligencia que comprenda todas las fuerzas por las que la naturaleza es animada, y las posiciones respectivas de los seres que la componen, es más, si esta inteligencia fuera lo suficientemente enorme para someter todos estos datos a un análisis, comprendería en la misma fórmula desde los movimientos de los mayores cuerpos del universo hasta los del átomo más ligero.

Se trata del mismo Laplace que contestó a Napoleón Bonaparte:«Señor, no necesito esa hipótesis», cuando el emperador remarcó que no se mencionaba al creador en el gran libro de Laplace sobre la mecánica celeste.

Más recientemente, el matemático de IBM y autor, Clifford A. Pickover, escribió en su entretenido libro *The Loom of God*:«No sé si Dios es un matemático, pero las matemáticas son el telar sobre el que Dios hila la tela del universo… El que la realidad pueda describirse o aproximarse a través de *simples* expresiones matemáticas, me sugiere que la naturaleza tiene como núcleo las matemáticas».

A los partidarios de la «versión platónica modificada» de las matemáticas les gusta señalar que, a lo largo de los siglos, las matemáticas han producido (o «descubierto») numerosos objetos de matemáticas puras sin tener en mente ninguna aplicación para las mismas. Décadas más tarde, se descubrió que dichas ideas y modelos matemáticos daban soluciones a problemas de física. Los mosaicos de Penrose y las geometrías no-euclidianas son hermosos testimonios de este proceso en el que las matemáticas alimentan inesperadamente a la física, pero existen muchos más.

También hubo muchos casos de retroalimentación entre la física y las matemáticas, donde un fenómeno físico inspiraba un modelo matemático que más tarde demostraba que era la explicación de un fenómeno físico totalmente diferente. Un excelente ejemplo de ello lo encontramos en el fenómeno conocido como movimiento browniano. En 1827,

el botánico británico Robert Brown (1773-1858) observó que cuando las partículas de polen se encuentran suspendidas en el agua, entran en un estado de movimiento agitado. Dicho efecto fue explicado por Einstein en 1905 como resultado de las colisiones que las partículas coloidales experimentan con las moléculas del fluido que las rodea. Cada colisión tiene un efecto insignificante, debido a que los granos de polen tienen una masa millones de veces mayor que las moléculas de agua, pero el bombardeo persistente tiene un efecto acumulativo. Es sorprendente como el mismo modelo pudo aplicarse a los movimientos de las estrellas en los grupos de estrellas. En ese caso, el movimiento browniano se produce a causa del efecto acumulativo de muchas estrellas que pasan por una estrella dada, con cada pase alterando el movimiento (por la interacción gravitacional) en una pequeña cantidad.

Sin embargo, existe una visión totalmente diferente (de la visión platónica modificada) en la naturaleza de las matemáticas y la razón de su efectividad. Según este punto de vista (relacionado intrínsecamente con los dogmas denominados «formalismo» y «constructivismo» en la filosofía de las matemáticas) las matemáticas no existen fuera del cerebro humano. Las matemáticas, tal como las conocemos, no son más que una invención humana, por tanto, una civilización inteligente en cualquier otra parte del universo podría haber desarrollado complejos radicalmente diferentes. Los objetos matemáticos carecen de realidad objetiva, son imaginarios. En palabras del gran filósofo alemán Immanuel Kant: «La última verdad de las matemáticas reside en la posibilidad de que sus conceptos puedan construirse en la mente humana». En otras palabras, Kant remarca el aspecto de *libertad* de las matemáticas, la libertad para postular e inventar modelos y estructuras.

Esta visión de las matemáticas como una invención humana se ha hecho popular en particular con los psicólogos modernos. Por ejemplo, el investigador y autor francés Stanislas Dehaene en su interesante libro *The Number Sense*, publicado en 1997, llega a la conclusión de que «el intuicionismo», sinónimo de las matemáticas como invención humana, «me parece que aporta el mejor informe de las relaciones entre la aritmética y la mente humana». De un modo similar, la última frase del libro *Where Mathematics Comes From* (2000) por el lingüista de la Universidad de California, Berkeley, George Lakoff y el psicólogo Rafael E. Núñez, reza así: «El retrato de las matemáticas tiene rostro humano». Dichas conclusiones se basan principalmente en los resultados de los experimentos psicológicos y en estudios neurológicos sobre la funcionalidad del cerebro. Estos experimentos muestran que los bebés poseen unos mecanismos innatos para reconocer los números en pequeños grupos y que los niños adquieren las capacidades aritméticas simples espontáneamente, con poca instrucción formal. Además, la corteza parietal inferior del cerebro ha sido identificada como el área que recoge el circuito neuronal encargado de las capacidades numéricas simbólicas. Dicha área, en ambos hemisferios cerebrales se localiza anatómicamente en la conjunción de las conexiones neuronales del tacto, la visión y el oído. En los pacientes que sufren una extraña forma de ataque al realizar cálculos aritméticos (conocido como epilepsia aritmética), la medida de sus ondas cerebrales (electroencefalogramas) muestra anormalidades en la corteza parietal inferior. Del mismo modo, las lesiones en esta región afectan a la capacidad matemática, la escritura y la coordinación espacial.

Aunque se base en la fisiología y la psicología, la visión de las matemáticas como una invención humana sin una realidad intrínseca todavía tiene que responder a dos preguntas misteriosas: ¿Por qué son tan poderosas las matemáticas para explicar el universo? ¿Cómo es posible que aun los productos más puros de las matemáticas, a la larga encajen con los fenómenos físicos como un guante?

La respuesta basada en la «intervención humana» contestaría tomando como modelo la biología: la evolución y la selección natural. Aquí la idea es que se ha conseguido el progreso en la comprensión del universo y la formulación de las leyes matemáticas que describen los fenómenos dentro de él, gracias a un proceso de evolución largo y tortuoso. Nuestro modelo actual de universo es el resultado de una larga evolución que ha sufrido muchos falsos principios y cambios de sentido. La selección natural ha arrancado los modelos matemáticos que no encajaban con las observaciones y los experimentos, y ha dejado tan sólo los que han tenido éxito. Según esta visión, todas las «teorías» del universo no son más que «modelos» cuyos atributos se determinan solamente por su éxito al encajar con los datos observados y experimentados. El loco modelo del sistema solar de Kepler en *Mysterium Cosmographicum* era aceptable, siempre y cuando pudiera predecir y explicar el comportamiento de los planetas.

Visto así, el éxito de la matemática pura convertida en matemática aplicada, simplemente refleja una superproducción de conceptos, de los que la física ha seleccionado los más adecuados para sus necesidades (la supervivencia del más fuerte.) Después de todo, como los «invencionistas» señalarían, Godfrey H. Hardy estuvo siempre orgulloso de «no haber hecho nada "útil"». Parece

ser que esta opinión sobre las matemáticas también la suscribe Marilyn vos Savant, que ostenta el «récord mundial» de coeficiente intelectual (un increíble 228). Se suele citar por haber dicho que «empiezo a creer que las matemáticas simplemente pueden inventarse para describir cualquier cosa, y la materia no es ninguna excepción».

En mi humilde opinión, ni la visión platónica modificada ni la de la selección natural proporcionan una respuesta totalmente satisfactoria (por lo menos tal y como se formulan tradicionalmente) al misterio de la efectividad de las matemáticas.

Afirmar que las matemáticas no son más que una pura invención humana y que pueden explicar la naturaleza *sólo* por la selección natural y la evolución, ignora algunos hechos importantes en la naturaleza de las matemáticas y en la historia de los modelos teoréticos del universo. Primero, aunque las reglas matemáticas (por ejemplo, los axiomas de la geometría o de una teoría dada) sean, efectivamente, creaciones de la mente humana, una vez que esas normas se especifican, perdemos nuestra libertad. La definición de la Proporción Áurea surgió en un principio de los axiomas de la geometría euclidiana y la definición de la secuencia de Fibonacci de los axiomas de la teoría numérica. Pero el hecho de que la proporción de números Fibonacci sucesivos converja en la Proporción Áurea fue *impuesto*: los humanos no pudimos elegir. Por tanto, los objetos matemáticos, aunque sean imaginarios, poseen propiedades *reales*. En segundo lugar, la explicación del irrazonable poder de las matemáticas no puede basarse tan sólo en la evolución en un sentido restringido. Por ejemplo, cuando Newton propuso su teoría de la gravitación, los datos que trataba de explicar eran precisos para al menos tres figuras significativas. Pero

su modelo matemático de la fuerza entre dos masas cualesquiera del universo logró conseguir la increíble precisión de más de una parte entre un millón. De ahí que este modelo en particular no fuera impuesto a Newton por las medidas existentes de los movimientos de los planetas, ni que Newton *forzara* un fenómeno natural en un modelo matemático que ya existía. Es más, la selección natural en la interpretación común de ese concepto tampoco encaja, debido a que no se trataba de cinco teorías propuestas que compitieran, para que una ganara. Más bien… ¡Newton era el único que jugaba!

Por otro lado, el modelo platónico modificado se enfrenta a diferentes retos.

En primer lugar, existe el importante tema conceptual de que el modelo platónico modificado no ofrece *explicación* alguna en lo que al poder de las matemáticas se refiere. La cuestión simplemente se transforma en una creencia en el apuntalamiento matemático del mundo físico. Simplemente se *asume* que las matemáticas son la contrapartida simbólica del universo. Roger Penrose, el cual, como ya he indicado al principio, es un ferviente partidario del mundo platónico de las formas matemáticas, coincide en que «el desconcertante papel subyacente del mundo platónico en el mundo físico» sigue siendo un misterio. El físico de la Universidad de Oxford, David Deutsch, le da la vuelta a la cuestión. En su intuitivo libro, publicado en 1997, *The Fabric of Reality* se pregunta: «En una realidad compuesta de física y entendida por los métodos científicos, ¿de dónde viene la certeza matemática?» Penrose añade a la efectividad de las matemáticas dos misterios más. En su libro *Shadows of the Mind*, se pregunta: «¿Cómo es posible que la percepción de seres pueda surgir del mundo físico?» y «¿Cómo puede la

mentalidad ser capaz aparentemente de “crear” conceptos matemáticos de algún tipo de modelo mental?» Estas misteriosas preguntas, que se escapan al propósito de este libro, tratan del origen de la conciencia y de la perpleja habilidad de nuestras herramientas mentales más bien primitivas, para poder acceder al mundo platónico (que para Penrose es una realidad objetiva).

El segundo problema de la versión platónica modificada está relacionada con la cuestión de la *universalidad*. ¿Hasta qué punto podemos tener la certeza de que las leyes que nuestro universo debe obedecer tienen que presentar ecuaciones matemáticas del tipo que hemos formulado? Hasta muy recientemente, es probable que la mayoría de los físicos de la faz de la Tierra habría argumentado que la historia ha demostrado que las ecuaciones son el único modo en que las leyes de la física pueden expresarse. Sin embargo, puede que esta situación cambie con la publicación del libro *A New Kind of Science* de Stephen Wolfram. Wolfram, uno de los pensadores más innovadores en el cálculo científico y en la teoría de sistemas complejos, es más conocido por el desarrollo de *Matemática*, un sistema/programa informático que permite una serie de cálculos que no habían sido accesibles hasta entonces. Tras diez años de total silencio, Wolfram surge con un libro provocativo que osadamente clama que puede reemplazar la infraestructura básica de la ciencia. Wolfram propone como base para los modelos de la naturaleza, unos sencillos programas informáticos en lugar de las ecuaciones matemáticas que han dominado la ciencia durante más de trescientos años. Nos propone que el principal secreto de la naturaleza es el uso de programas sencillos para generar complejidad.

El libro de Wolfram no estaba aún publicado mientras escribía estas líneas, pero por una larga conversación que sostuve con él y una entrevista que ofreció al escritor de ciencia, Marcus Chown, puedo concluir que su trabajo tiene unas implicaciones de gran alcance. Sin embargo, desde el restringido punto de vista de su reflexión sobre el platonismo, la obra de Wolfram señala que, por lo menos, el particular mundo matemático que muchos pensaban que existía, y que se creía que estaba subyacente a la realidad física, puede no ser único. En otras palabras, definitivamente pueden existir descripciones de la naturaleza muy diferentes de las que tenemos. Las matemáticas tal y como las conocemos, capturan sólo una pequeña parte del enorme espacio de todos los conjuntos de reglas que pueden describir el funcionamiento del cosmos.

Si tanto la interpretación de la visión platónica modificada como la selección natural tienen dificultades para intentar explicar la increíble efectividad de las matemáticas, ¿hay alguna que funcione?

Creo que la explicación se halla en los conceptos tomados prestados de ambos puntos de vista más que en adoptar uno u otro. La situación aquí es muy similar a los intentos históricos de la física por explicar la naturaleza de la luz. La lección de este periodo de la historia de la ciencia es tan profunda que la describiré brevemente.

El primer ensayo de Newton fue sobre óptica y continuó trabajando sobre esta materia durante la mayor parte de su vida. En 1704, publicó la primera edición de su obra *Óptica*, que más tarde revisó tres veces. Newton propuso una «teoría de partículas de la luz», en la que asumía que la luz estaba formada de partículas sólidas y diminutas que obedecían las mismas leyes del movimiento

que las bolas de billar. En palabras de Newton: «Hasta los rayos de luz parecen cuerpos sólidos». Dos famosos experimentos de principios del siglo XX, descubrieron el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton, y ofrecieron pruebas fehacientes para la idea de las partículas de luz. El efecto fotoeléctrico es un proceso en que los electrones en un trozo de metal absorben suficiente energía de la luz que les permite escapar. La explicación de Einstein para este efecto en 1905 (que le hizo ganar el premio Nobel de Física en 1922) demostró que la luz libera energía a los electrones en granos, unidades indivisibles de energía. Por tanto, se introdujo el *fotón* (la partícula de la luz). El físico Arthur Holly Compton (1892-1962) analizó de 1918 a 1925 la radiación de los rayos-X de los electrones tanto experimental como teóricamente. Su obra (que le hizo ganar el premio Nobel de Física en 1927) confirmó la existencia del fotón.

Pero hubo otra teoría de la luz (una *teoría de las ondas*) en la que se suponía que la luz se comportaba como las ondas de agua en un estanque. Esta teoría fue defendida por el físico holandés Christiann Huygens (1629-1695). La teoría de las ondas pasó inadvertida hasta que el físico y médico Thomas Young (1773-1829) descubrió la *interferencia* en 1801. El fenómeno por sí mismo es bastante simple. Suponga que hunde sus dedos índice periódicamente en un estanque. Cada dedo creará una secuencia de ondas concéntricas; la cresta y la depresión de la ola seguirá una a la otra en forma de anillos que se expanden. En los puntos donde una cresta que emana de un dedo se encuentra con la cresta de otro, obtendrá dos ondas que aumentarán mutuamente («interferencia constructiva»). En los puntos donde una cresta se superponga a la depresión de otra, se aniquilarán mutuamente («interferencia destructiva»). Un detallado análisis del patrón fijo que surge demuestra que a

lo largo de la línea central (entre los dos dedos) existe una interferencia constructiva. En cada lado, las líneas de interferencia destructiva se alternan con las de interferencia constructiva.

En el caso de la luz, la interferencia destructiva simplemente significa líneas oscuras. Young, un niño prodigio que hablaba once lenguas a la edad de dieciséis años, hizo un experimento en el que pasó la luz a través de dos orificios y demostró que la luz en la superficie que se ve estaba dividida en «líneas oscuras».

Los resultados de Young, seguidos por la impresionante obra teórica del ingeniero francés Augustin Fresnel de 1815 a 1820, iniciaron una conversión de los físicos a la teoría de la onda. Experimentos posteriores llevados a cabo por el físico francés Léon Foucault en 1850 y por el físico estadounidense Albert Michelson en 1883 demostraron sin ninguna ambigüedad que la refracción de la luz que pasa del aire al agua también se comporta como predijo la teoría de onda. Más importante aún, el físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) publicó en 1864 una teoría exhaustiva del electromagnetismo que predecía la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan moviéndose a la velocidad de la luz. Maxwell propuso que la propia luz es una onda electromagnética. Finalmente, entre 1886 y 1888, el físico alemán Heinrich Hertz demostró experimentalmente que la luz era, en efecto, la onda electromagnética predicha por Maxwell.

¿Qué es la luz? ¿Es un bombardeo puro de partículas (fotones) o es una onda pura? En realidad, no es ninguna de las dos. La luz es un fenómeno físico más complicado de lo que cualquiera de estos dos conceptos, basados en modelos físicos clásicos, puedan describir. Para explicar la

propagación de la luz y entender fenómenos como la interferencia, podemos y debemos usar la teoría de onda electromagnética. Cuando queremos discutir la interacción de la luz con las partículas elementales, sin embargo, tenemos que utilizar la descripción de fotones. Esta imagen, en la que la descripción de las partículas y de la onda se complementan mutuamente, se conoce como *dualidad onda-partícula*. La moderna teoría de la luz cuántica ha unificado las nociones clásicas de las ondas y las partículas en el concepto de la probabilidad. El campo electromagnético se representa mediante una función de onda que ofrece probabilidades de hallar el campo de ciertos modos. El fotón es la energía asociada a dichos modos.

Volvamos ahora a la cuestión de la naturaleza de las matemáticas y la razón de su efectividad. Creo que en este caso debe aplicarse el mismo criterio de complementariedad. Las matemáticas fueron *inventadas*, en el sentido de que las «reglas del juego» (los grupos de axiomas) son inventos humanos. Sin embargo, una vez inventados vivieron su propia vida y los humanos tuvieron que (y todavía tienen que) descubrir todas sus propiedades, siguiendo el espíritu de la visión platónica. La infinita lista de apariciones inesperadas de la Proporción Áurea, las innumerables relaciones matemáticas que obedecen a los números Fibonacci y el hecho de que todavía no sepamos si hay infinitos primos Fibonacci nos da una mayor evidencia para esta búsqueda del descubrimiento.

Wolfram sostiene unos puntos de vista muy similares. Le pregunté en concreto si creía que las matemáticas eran «inventadas» o «se descubrían». Contestó: «Si no hubiera elección en seleccionar este conjunto de reglas en particular, entonces tendría sentido decir que fueron descubiertas, pero

como hay mucho donde elegir, y nuestras matemáticas están basadas históricamente, debo decir que fueron inventadas». La frase «basadas históricamente» en este contexto es crucial ya que implica que el conjunto de axiomas en el que se basan nuestras matemáticas es el que surgió debido a la geometría y la aritmética de los antiguos babilonios. Esto plantea dos preguntas inmediatas: 1) ¿por qué los babilonios desarrollaron estas disciplinas en particular y no cualquier otro tipo de reglas? Y parafraseando la cuestión de la efectividad de las matemáticas: 2) ¿por qué estas disciplinas y las que generaron fueron tan útiles para la física?

Curiosamente, puede que las respuestas a ambas preguntas estén relacionadas. Las propias matemáticas podrían haberse originado a partir de una percepción humana de cómo funciona la naturaleza. Puede que la geometría simplemente refleje la habilidad humana para reconocer con facilidad las líneas, las aristas y las curvas. Puede que la aritmética represente la aptitud humana para resolver objetos discretos. En este marco, las matemáticas que tenemos son una característica *de los detalles biológicos de los humanos y de cómo perciben el cosmos*. Por tanto, las matemáticas son de algún modo el lenguaje del universo, del universo entendido por los humanos. Otras civilizaciones extraterrestres inteligentes pueden haber desarrollado un conjunto de normas totalmente diferentes, si sus mecanismos de percepción son muy diferentes a los nuestros. Por ejemplo, cuando una gota de agua se añade a otra, o cuando una nube molecular de la galaxia choca con otra, sólo producen una gota o una nube, no dos. Por tanto, si existe una civilización que se basa en los fluidos, para ellos, uno más uno no necesariamente es igual a dos. Una civilización así puede que ni reconozca los números primos o la Proporción Áurea. Por dar otro ejemplo, no hay apenas

duda de que si la gravedad de la Tierra fuera más fuerte de lo que es en realidad quizá los babilonios y Euclides hubiesen propuesto una geometría diferente a la euclidiana. La teoría de Einstein de la relatividad general nos ha enseñado que en un campo gravitacional mucho más fuerte, el espacio que nos rodea sería curvado, no plano (los rayos de luz viajarían por trayectorias curvadas en lugar de rectas). La geometría de Euclides surgió de sus simples observaciones en la débil gravedad de la Tierra. (Otras geometrías, sobre superficies curvas se formularon en el siglo XIX.)

La evolución y la selección natural jugaron un importante papel en nuestras teorías del universo. Por eso precisamente no seguimos adhiriéndonos hoy en día a la física de Aristóteles. Sin embargo, esto no significa que la evolución haya sido siempre continuada y fácil. La evolución biológica sobre la Tierra tampoco lo fue. La trayectoria de la vida en ocasiones se formó por ocurrencias aleatorias, como las extinciones en masa. Los impactos de cuerpos astronómicos (cometas o asteroides), de varias millas de diámetro, causaron la extinción de los dinosaurios y asentaron el camino para la dominación de los mamíferos. La evolución de las teorías del universo fue esporádicamente salpicada por saltos cuánticos en su comprensión. La teoría de la gravitación de Newton y la relatividad de Einstein («todavía no puedo entender cómo se le ocurrió», dijo el fallecido físico Richard Feynman) son dos ejemplos perfectos de estos avances espectaculares. ¿Cómo pueden explicarse estos logros milagrosos? La verdad es que no podemos. Es decir, no más de lo que podemos explicar cómo, en el mundo del ajedrez, acostumbrado a victorias por escaso margen de medio punto, en 1971 Bobby Fischer de repente acabó con dos grandes maestros del ajedrez como

Mark Taimanov y Bent Larsen por seis puntos a nada en los campeonatos mundiales. Puede que encontremos igual de difícil comprender cómo los naturalistas Charles Darwin (1809-1882) y Alfred Russel Wallace (1823-1913) tuvieron la inspiración de forma independiente de introducir el concepto de la evolución (la idea de un descendiente de toda vida de un origen ancestral común). Simplemente debemos reconocer el hecho de que ciertos individuos, en términos de intuición, están por encima de los demás. Sin embargo, ¿es posible que revoluciones como las de Newton o Einstein encajen en un escenario de evolución y selección natural? Pueden, pero en una interpretación menos común de la selección natural. Aunque sea cierto que la teoría de la gravitación de Newton no tuviera otras teorías con las que competir en su época, no habría sobrevivido hasta hoy en día si no hubiera sido «la más fuerte». Por el contrario, Kepler propuso un modelo de poca duración sobre la interacción de los planetas y el Sol, en los que el Sol gira sobre su eje desprendiendo rayos de poder magnético. Estos rayos se suponía que atraían a los planetas y les hacían girar en círculo.

Cuando estas definiciones generales de la evolución (incluidos los saltos cuánticos) y la selección natural (operando sobre periodos largos de tiempo) se adopten, creo que la efectividad «inaceptable» de las matemáticas encontrará su explicación. Nuestras matemáticas son la contrapartida simbólica del *universo que percibimos*, y su poder ha sido aumentado continuamente por la exploración humana.

Jef Raskin, creador del ordenador Macintosh de Apple, enfatiza un aspecto diferente: la evolución de la lógica humana. En un ensayo publicado en 1998 sobre la

efectividad de las matemáticas, concluye que «La *lógica* (el énfasis es mío) humana se nos impuso por el mundo físico y es, por tanto, consistente con ello. Las matemáticas se derivan de la lógica. Por eso las matemáticas son consistentes con el mundo físico».

En la obra de teatro *Tamburlaine the Great*, una historia sobre un héroe-villano maquiavélico que es a la vez un asesino vicioso y sensible, el gran dramaturgo inglés Christopher Marlowe (1564-1593) reconoce esta aspiración por entender el cosmos:

La naturaleza nos hizo de cuatro elementos
Luchando en nuestros corazones por la batalla,
Así nos enseñó a tener mentes que aspiran:
Nuestras almas, cuyas facultades pueden comprender
La maravillosa Arquitectura del mundo:
Y medir los trayectos errantes del planeta,
aun escalando hacia el conocimiento infinito,
y siempre moviéndose como las esferas sin fin…

La Proporción Áurea es un producto de la geometría inventada por los humanos. Los humanos, sin embargo, no tenían ni idea de hacia qué mundo de cuento mágico les conducía este producto. Si la geometría no se hubiera inventado, quizás no habríamos conocido nunca la Proporción Áurea. Pero entonces, ¿quién sabe?, habría aparecido como resultado de un breve programa informático.

APÉNDICES

Apéndice 1

Queremos demostrar que por cada uno de los números enteros p y q, tales que p sea mayor que q, los tres números: $p^2 - q^2$;$2pq$ y $p^2 + q^2$ forman un triplete pitagórico. En otra palabras, necesitamos demostrar que la suma de los cuadrados de los dos primeros es igual al cuadrado del tercero. Para esto, usaremos las identidades generales que funcionan tanto para a como para b:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Basándonos en estas identidades, el cuadrado del primer número es:

$$(p^2 - q^2)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4$$

Y la suma de los dos primeros cuadrados es:

$$p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4.$$

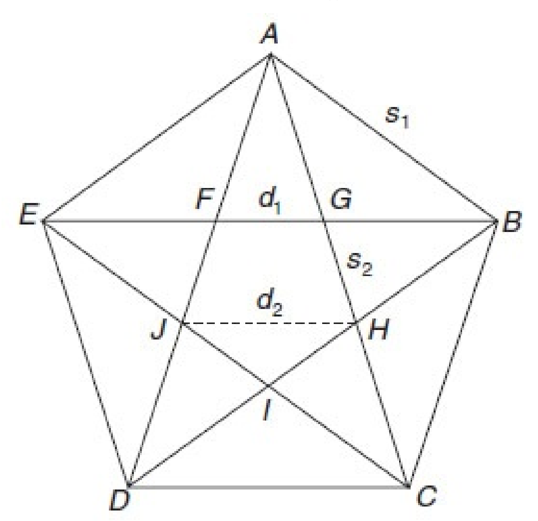
El cuadrado del último número es:

$$(p^2 + q^2)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4.$$

Por tanto, podemos observar que el cuadrado del tercer número es realmente igual a la suma de los cuadrados de los dos primeros, sin importar los valores de p y q.

Queremos demostrar que la diagonal y el lado del pentágono son inconmensurables, no tienen ninguna medida común.

La prueba es mediante el método general de la *reductio ad absurdum* descrita al final del capítulo 2.



Llamemos s_1 al lado del pentágono *ABCDE* y d_1 a su diagonal. A partir de las propiedades del triángulo isósceles se demuestra fácilmente que $AB = AH$ y $HC = HJ$. Llamemos ahora s_2 al lado del pentágono pequeño *FGHIJ* y d_2 a su diagonal. Tendremos:

$$AC = AH + HC = AB + HJ.$$

Por tanto:

$$d_1 = s_1 + d_2 \text{ o } d_1 - s_1 = d_2$$

Si d_1 y s_1 tienen una misma medida, significa que tanto d_1 y s_1 son múltiplos integrados de la misma medida. Por tanto, también es una medida común de $d_1 - s_1$, y por tanto de d_2. De forma similar, las igualdades

$$AG = HC = HJ$$

$$AH = AB$$

y

$$AH = AG + GH\ AB = HJ + GH$$

nos dan

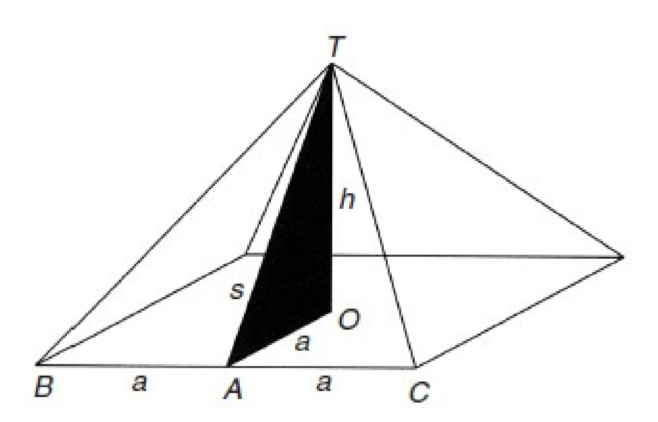
$$s_1 = d_2 + s_2$$

o

$$s_1 - d_2 = s_2.$$

Basándonos en nuestra presunción de que la medida común de s_1 y d_1 es también una medida común de d_2, la última igualdad demuestra que también es una medida común de s_2.Por tanto descubrimos que la misma unidad que mide d_1 y s_1 también mide d_2 y s_2. Este proceso continúa *ad infinitum* para pentágonos cada vez más pequeños. Obtendríamos que la misma unidad que tiene una medida común para el lado y diagonal del primer pentágono es también una medida común del resto de pentágonos, sin importar lo pequeños que fueran. Ya que esto no puede ser verdad, significa que nuestra presunción inicial según la cual el lado y diagonal tienen una medida común era falsa; esto completa la prueba de que d_1 y s_1 son inconmensurables.

El área de un triángulo es la mitad del producto de la base y de la altura a la base. En el triángulo *TBC* la base, *BC*, es igual a $2a$ y la altura, *TA*, es igual a s. Por tanto, el área del triángulo es igual a $s \times a$. Queremos demostrar que si el cuadrado de la altura de la pirámide, h^2, es igual al área de su cara triangular, $s \times a$, entonces s/a es igual a la Proporción Áurea.



Tenemos

$$h^2 = s \times a.$$

Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *TOA*, tenemos

$$s^2 = h^2 + a^2.$$

Ahora podemos sustituir h^2 de la primera ecuación para obtener

$$s^2 = s \times a + a^2.$$

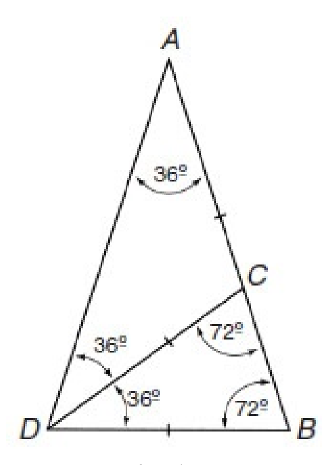
Dividiendo ambos lados por a^2, obtenemos:

$$(s/a)^2 = (s/a) + 1.$$

En otras palabras, si cambiamos s/a por x tenemos la ecuación cuadrática:

$$x^2 = x + 1.$$

En el capítulo 4 muestro que ésta es precisamente la ecuación definida por la Proporción Áurea.



Uno de los teoremas de los *Elementos* demuestra que cuando dos triángulos tienen los mismos ángulos son *semejantes*. Es decir, los dos triángulos tienen exactamente la misma forma, con todos los lados proporcionales entre sí. Si un lado de un triángulo es el doble de largo que el de otro, entonces ocurre lo mismo con el resto de lados. Los dos triángulos *ADB* y *DBC* son semejantes (porque tienen los mismos ángulos). Por tanto, la proporción *AB/DB* (proporción de los lados de dos triángulos *ADB* y *DBC*) es igual a *DB/BC* (proporción de las bases de los dos triángulos):

$$AB/DB = DB/BC.$$

Pero los dos triángulos son también isósceles, así que

$$DB = DC = AC.$$

Por tanto, descubrimos a partir de las dos igualdades anteriores que

$$AC/BC = AB/AC,$$

lo que significa (según la definición de Euclides) que el punto *C* divide la línea *AB* en Proporción Áurea. Dado que $AD = AB$ y $DB = AC$, también tenemos que $AD/DB = \Phi$.

APÉNDICE 5

Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde *a*, *b* y *c* son números arbitrarios. Por ejemplo, en la ecuación $2x^2 + 3x + 1 = 0$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

La fórmula general para las dos soluciones de la ecuación es

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En el ejemplo anterior

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

En la ecuación que obtenemos para la Proporción Áurea,

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

Tenemos $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. Las dos soluciones son por tanto:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

El problema de la herencia puede resolverse como sigue. Nombremos a todas las propiedades *E*, y el reparto (en bezants) de cada hijo *x*. (Todos comparten la misma herencia).

El primer hijo recibe:

$$x = 1 + \frac{1}{7}(E - 1).$$

El segundo hijo recibe:

$$x = 2 + \frac{1}{7}(E - 2 - x).$$

La ecuación de los dos repartos es:

$$1 + \frac{1}{7}(E - 1) = 2 + \frac{1}{7}(E - 2 - x)$$

$$1 + \frac{E}{7} - \frac{1}{7} = 2 + \frac{E}{7} - \frac{2}{7} - \frac{x}{7}.$$

Y arreglando:

$$\frac{x}{7} = \frac{6}{7}$$

$$x = 6$$

Por tanto, cada hijo recibe 6 bezants.

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos:

$$6 = 1 + \frac{1}{7}(E - 1)$$

$$6 = 1 + \frac{E}{7} - \frac{1}{7}$$

$$\frac{E}{7} = \frac{36}{7}$$

$$E = 36.$$

Las propiedades totales son 36 bezants. El número de hijos 36/6 = 6. La solución de Fibonacci es la siguiente:

Las propiedades tienen que ser un número tal que cuando se añade una vez 6, será divisible por 1 más 6, 7; cuando se añada 2 veces 6, será divisible por 2 más 6, 8; cuando se añada 3 veces 6, será divisible por 3 más 6, 9. El número es 36. $^{1}/_{7}$ de 36 menos $^{1}/_{7}$ es $^{35}/_{7}$; más 1 es $^{42}/_{7}$, o6; y éste es el total que recibe cada hijo; las propiedades divididas por lo que se queda cada hijo es igual al número de hijos, o $^{36}/_{6}$ igual a 6.

La relación entre el número de subobjetos, n, el factor de reducción de longitud, f, y la dimensión, D, es

$$n = \left(\frac{1}{f}\right)^D.$$

Si un número positivo A se escribe como $A = 10^L$, entonces llamamos L al logaritmo (base 10) de A, y lo escribimos como log A. En otras palabras, las dos ecuaciones $A = 10^L$ y $L = \log A$ son totalmente equivalentes entre sí. Las reglas de los logaritmos son:

i) El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos:

$$\log (A \cdot B) = \log A + \log B.$$

ii) El logaritmo de una proporción es la resta de los logaritmos:

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B\cdot$$

iii) El logaritmo de una potencia de un número es tantas veces la potencia del logaritmo del número:

$$\log A^m = m \log A.$$

Ya que $10^0 = 1$, obtenemos de la definición del logaritmo que $\log 1 = 0$. Si $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, etc., tenemos que $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, etc. Por tanto, el logaritmo de cualquier número entre 1 y 10 es el un número entre 0 y 1; el logaritmo de cualquier número entre 10 y 100 es un número entre 1 y 2; etc.

Si cogemos el logaritmo (base 10) de los dos lados en la ecuación anterior (que describe la relación entre n, f y D) obtenemos:

$$\log n = D \log (1/f) = -D \log f.$$

Por tanto, dividiendo ambos lados por log *f*,

$$D = -\frac{\log n}{\log f}.$$

Para el caso del copo de nieve de Koch, por ejemplo, cada curva contiene cuatro «subcurvas» de una tercera parte del tamaño; por tanto, $n = 4$, $f = 1/3$ y obtenemos

$$D = -\frac{\log 4}{\log (1/3)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618595\ldots$$

Si examinamos la figura 116*a*, veremos que la condición para que se toquen las dos ramas tan sólo es que la suma de todas las longitudes horizontales de las ramas que siempre decrecen con longitudes que empiezan por f^3 sean iguales al componente horizontal de la rama larga con una longitud *f*. Todos los componentes horizontales se obtienen por la longitud total multiplicada por el coseno de 30 grados. Por tanto, obtenemos:

$$f \cos 30° = f^3 \cos 30° + f^4 \cos 30° + f^5 \cos 30° + f^6 \cos 30° + \ldots$$

Dividiendo por cos 30º obtenemos:

$$f = f^3 + f^4 + f^5 + f^6 + \ldots$$

La suma del lado derecho es la suma de una progresión geométrica infinita (cada cifra es igual a la cifra anterior multiplicada por el factor constante) en la cual la primera cifra es f^3, yla proporción de dos cifras consecutivas es *f*. En general, la suma *S* de una progresión geométrica infinita en la que la primera cifra es *a*, y la proporción de cifras consecutivas es *q*, es igual a

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Por ejemplo, la suma de la progresión

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

en la cual $a = 1$ y $q = 1/2$ es igual a

$$S = \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

En nuestro caso, encontramos de la ecuación anterior:

$$f = \frac{f^3}{1-f}.$$

Dividiendo ambos lados por *f*, tenemos

$$1 = \frac{f^2}{1-f}.$$

Multiplicando por $(1 - f)$ y arreglándolo, obtenemos la ecuación cuadrática:

$$f^2 + f^{-1} = 0$$

con la solución positiva

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

la cual es $1/\Phi$.

La ley de Benford afirma que la probabilidad *P* de que el dígito *D* aparezca en el primer lugar viene dada (base logarítmica 10) por:

$$P = \log (1 + 1/D).$$

Por tanto, para $D = 1$:

$$P = \log (1 + 1) = \log 2 = 0{,}30.$$

Para $D = 2$

$$P = \log (1 + {}^{1}/_{2}) = \log 1{,}5 = 0{,}176.$$

Etcétera. Para $D = 9$,

$$P = \log (1 + {}^{1}/_{9}) = \log {}^{10}/_{9} = 0{,}046.$$

La ley más general dice, por ejemplo, que la probabilidad de que los tres primeros dígitos sean 1, 5 y 8 es:

$$P = \log (1 + {}^{1}/_{158}) = 0{,}0027.$$

Apéndice 10

La demostración de Euclides de que existen muchos primos infinitos se basa en el método de la reducción *ad absurdum*. Empezó asumiendo la siguiente contradicción: sólo existe un número finito de números. Si eso fuera cierto, no obstante, entonces uno de ellos debe ser el primo más grande. Llámemos a ese primo *P*. Euclides construyó un nuevo número mediante este proceso: multiplicó todos los primos juntos desde el 2 hasta (e incluyendo) *P*, y entonces añadió 1 al producto. El nuevo número era

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \ldots \times P + 1.$$

Dada la conclusión original, este número debe ser compuesto (no primo), porque obviamente es mayor que *P*, el cual hemos aceptado que es el número primo mayor. Por tanto, este número debe ser divisible por al menos uno de los primos existentes. De todas formas, dada su construcción, vemos que si dividimos este número por cualquier primo mayor de *P*, esto dejará un 1 como resto. La implicación es, que si el número es en realidad compuesto, algunos primos mayores de *P* deben dividirlo. De todos modos, esta conclusión contradice la afirmación según la cual *P* es el primo mayor; por tanto queda completada la demostración de que existe un número infinito de números primos.

NOTAS

1. N. de los T.: Literalmente «*una yunta de bueyes*» y «*una yunta de perros*,» haciendo referencia al yugo impuesto a los bueyes y caballos en el campo.

2. N. de los T.: Sufijo que se aplica a los números del 13 al 19.

3. N. de los T.: Es decir «uno restante» y «dos restantes» respectivamente.

1. N. de los T.: Star-Y-Pointig Pyramid.

2. N. de los T.: Algo así como «El Gran Piramidiota».

1. N. de los T: Literalmente «media constante».

1. N. de los T.: en inglés Scanning Tunneling Microscopy (STM).

2. N. de los T.: Siendo C = cara y CR = cruz.

La proporción áurea
Mario Livio

Título original: *The Golden Ratio*

Av. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona
www.planetadelibros.com
Primera edición en libro electrónico (epub): junio de 2016
ISBN: 978-84-344-2437-1 (epub)
Conversión a libro electrónico: Newcomlab, S. L. L.
www.newcomlab.com

Índice